

Министерство общего и профессионального образования РФ

Уральский государственный технический университет

Ф.Н.Сарапулов

**РАСЧЕТ МОЩНОСТЕЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
СИЛ В УСТАНОВКАХ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА**

Учебное пособие

Екатеринбург

1998

ББК 31.27
С 44
УДК 621.313.333

Рецензенты: кафедра общей электротехники Уральской
государственной горно-геологической академии
(зав. кафедрой д-р техн. наук Г.С.Хронусов),
д-р техн. наук В.П.Рубцов

Автор: Ф.Н.Сарапулов

С 44 РАСЧЕТ МОЩНОСТЕЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ В
УСТАНОВКАХ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА: Учебное пособие
/ Ф.Н.Сарапулов. Екатеринбург: УГТУ, 1998. 89 с.

ISBN 5-230-06525-7

Учебное пособие содержит описание наиболее распространенных аналитических методов расчета электромагнитных полей, мощностей и электромагнитных сил в многослойных структурах, к которым относятся, как правило, установки индукционного нагрева.

Предлагается простой алгоритм решения данной задачи на основе теории цепей, позволяющий синтезировать схему замещения устройства в виде каскадного соединения в общем случае нелинейных пассивных и активных Е-Н-четырёхполюсников.

Указания предназначены для студентов всех форм обучения специальности 180500 - Электротехнологические установки и системы.

Библиогр. 15 назв. Табл. 3. Рис. 22.

С $\frac{2302040000 - 66}{7M2(03)}$ Без объявл.

© Уральский государственный
технический университет, 1998

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии приводится описание аналитических методов расчета электромагнитного поля и мощностей в элементах устройств индукционного нагрева объектов и сред. Следует отметить, что в инженерной практике (см., например, прил. 4) обычно используются упрощенные методики определения потерь в объектах термообработки на основе идеализированных графических зависимостей и эмпирических коэффициентов. В ряде случаев это может привести к чрезмерно большим погрешностям в результате расчета. К тому же при использовании такого подхода зачастую теряется физическое понимание процессов, происходящих в установках технологического нагрева, и путей эффективного влияния на их развитие.

Вместе с тем современный уровень компьютерной вооруженности специалиста позволяет ему решать электромагнитные и тепловые задачи в более общей постановке, используя методики разных уровней сложности, точности и трудоемкости.

Ниже рассматривается решение задачи проникновения электромагнитной волны в многослойную среду с различными свойствами и размерами слоев. Легко показать, что к такой структуре сводится любое устройство индукционного нагрева. На первых шагах задача решается в прямоугольной системе координат. Для многих практических установок это вполне допустимо, в других случаях выбирается иная система координат, наиболее соответствующая топологии устройства [4, 5, 7]. В качестве примера в прил. 2 показано решение задачи в цилиндрической системе координат.

1. ПЛОСКАЯ ВОЛНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В основу анализа положены следующие допущения:

- Рассматривается плоская волна электромагнитного поля (ЭМП) в многослойной структуре, состоящей из чередующихся проводящих (полупроводящих) и диэлектрических слоев бесконечной протяженности. Свойства материалов принимаются одинаковыми в пределах каждого слоя. Изменение магнитной проницаемости μ и удельной электрической проводимости γ при насыщении и нагреве металла учитывается введением эквивалентных μ и γ слоя. Точность такого эквивалентирования может быть повышена более подробным разбиением среды на слои.

- Магнитодвижущая сила индуктора задается или в виде бесконечно тонкого токового слоя с одинаковой линейной нагрузкой на поверхности многослойной структуры, или равномерно распределенной плотностью тока в зоне индуктора с конечной шириной. Оценка влияния конечных размеров установки на результаты расчета производится в дальнейшем на основе более сложных численных моделей и здесь не рассматривается.

Как известно [1, 2, 3], при отсутствии свободных зарядов ($\operatorname{div} \vec{D} = 0$) уравнение в частных производных для вектора напряженности электрического поля \vec{E} изотропной и линейной среды записывается [3]

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu\gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где μ, γ, ε - магнитная проницаемость, удельная электрическая проводимость и диэлектрическая проницаемость среды;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа в прямоугольных координатах.}$$

Для синусоидально изменяющегося во времени ЭМП

$$\underline{\dot{E}}_m = \dot{E}_m e^{j(\omega t + \psi_E)}, \quad (2)$$

где \dot{E}_m , ψ_E - комплексная амплитуда и начальная фаза напряженности E .

С учетом (2) уравнение (1) для i -го слоя среды принимает вид

$$\nabla^2 \underline{\dot{E}}_{mi} = \underline{\Gamma}_i^2 \underline{\dot{E}}_{mi}, \quad (3)$$

где

$$\underline{\Gamma}_i = \sqrt{j\omega\mu_i(\gamma_i + j\omega\varepsilon_i)} = \sqrt{j\alpha_i^2 - \frac{\omega^2}{v_i^2}}. \quad (4)$$

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i\varepsilon_i}}, \quad \alpha_i^2 = \omega\mu_i\gamma_i.$$

Для плоской волны (рис. 1) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и вектор \bar{E} имеет лишь одну проекцию $\dot{E}_{mx} = \dot{E}_m$. Тогда уравнение (3) записывается

$$\frac{d^2 \dot{E}_{mi}}{dz^2} = \underline{\Gamma}_i^2 \dot{E}_{mi}. \quad (5)$$

Напряженность магнитного поля (МП) и плотность тока, согласно уравнениям Максвелла [1, 2, 3], связаны с \dot{E}_{mi} соотношениями:

$$\frac{\partial \dot{E}_{mi}}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \dot{H}_{mi}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \dot{J}_{mi} = \gamma \dot{E}_{mi}.$$

Решение (5) согласно [1, 2, 3]

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mi} &= A_i e^{\underline{\Gamma}_i z} + B_i e^{-\underline{\Gamma}_i z}, \\ \dot{H}_{mi} &= -\frac{1}{j\omega\mu_i} \frac{d\dot{E}_{mi}}{dz} = \frac{\underline{\Gamma}_i}{j\omega\mu_i} \left(A_i e^{\underline{\Gamma}_i z} - B_i e^{-\underline{\Gamma}_i z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1.1. Волна в проводящем полупространстве ($\varepsilon = 0$)

На границе полупространства задана напряженность МП \dot{H}_{ms} , равная **линейной нагрузке индуктора** - полному току на единицу длины по координате y : $\dot{A}_H = w\dot{I}_H/l_H$, где w, \dot{I}_H, l_H - число витков, ток и длина индуктора по y .

При $z \rightarrow \infty$ ЭМП затухает, т.е. $H_m \rightarrow 0$, и из (6) получаем (рис.2,а)

$$\boxed{\dot{H}_m = \dot{H}_{ms} e^{-\underline{\Gamma}z}}, \quad \dot{E}_m = \dot{E}_{ms} e^{-\underline{\Gamma}z}, \quad \dot{J}_m = \dot{J}_{ms} e^{-\underline{\Gamma}z}, \quad (7)$$

где $\dot{E}_{ms} = \frac{j\omega\mu}{\underline{\alpha}} \dot{H}_{ms}$, $\dot{J}_{ms} = \underline{\alpha} \dot{H}_{ms}$ - напряженность и плотность тока на границе полупространства;

$$\boxed{\underline{\Gamma} = \underline{\alpha} = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)k},$$

$$k = \sqrt{\omega\mu\gamma/2} = 1/\delta,$$

так как для проводящей среды $\frac{\omega\varepsilon}{\gamma} \rightarrow 0$, например для меди

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 9 \cdot 58 \cdot 10^6} \approx 0.$$

В мгновенных значениях напряженности магнитного H и электрического E полей из (7) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} H &= H_{ms} e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_S - kz), \\ E &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_{ms} e^{-kz} \sin\left(\omega t + \psi_S - kz + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (8) следует, что волна H перемещается в направлении координаты z со скоростью v_M

$$\boxed{v_M = \frac{\omega}{k} = \sqrt{2\omega/\mu\gamma}}. \quad (9)$$

Действительно, если в (8) подставить $z = v_M \cdot t$, то фаза синусоиды записывается так: $\omega t + \psi_S - kz = \omega t + \psi_S - \omega t = \psi_S = \text{const}$, т.е. значение $H_{ms} \sin \psi_S$ синусоиды (как и ее амплитуды) с течением времени t оказывается на расстоянии $z = \frac{\omega}{k} t$ от поверхности полупространства, затухнув в e^{-kz} раз.

Длина волны при этом $\lambda_M = 2\pi/k$, а коэффициент затухания ее амплитуды равен k .

Величину $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\gamma}$ называют эквивалентной глубиной проникновения ЭМП в металлическое полупространство, так как можно считать, что в слое такой толщины плотность тока постоянна и равна

$$\dot{J}_z = \frac{I}{\delta} \int_0^\infty \dot{J}_{ms} e^{-\alpha z} dz = (1-j) \frac{\dot{J}_{ms}}{2} = \frac{\dot{J}_{ms}}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}, \quad (10)$$

а ее модуль $|\dot{J}_z| = \frac{I}{\sqrt{2}} |\dot{J}_{ms}|$. Интеграл в этом выражении означает полный ток полупространства, приходящийся на единицу длины по координате y , или **линейную нагрузку среды**

$$\boxed{\dot{A} = \dot{J}_z \cdot \delta = \dot{I}_m}.$$

Единичное электрическое сопротивление металлического полупространства (в расчете на единицу длины по осям x и y , рис. 2, б) для тока \dot{I}_m (линейной нагрузки)

$$\underline{Z}_{(I)} = R_{(I)} + jX_{(I)} = \frac{\dot{E}_{ms}}{\dot{H}_{ms}} = \frac{j\omega\mu}{\underline{\Gamma}} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1+j}{\gamma\delta} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}. \quad (11)$$

Это сопротивление одновременно представляет собой **волновое сопротивление** среды

$$\underline{z}_c = \underline{Z}_{Mem} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \underline{Z}_{(l)}. \quad (12)$$

Например, для меди при частоте $f = 50$ Гц имеем $|\underline{Z}_{Cu}| = 2,7 \cdot 10^{-6}$ Ом, для стали с $\mu > 1200\mu_o$ имеем $|\underline{Z}_{Fe}| > 100 |\underline{Z}_{Cu}|$. Если учесть непостоянство μ стали и потери на гистерезис, то $R_{(l)} = \frac{a_p}{\gamma\delta}$ и $X_{(l)} = \frac{a_q}{\gamma\delta}$, где $a_p = 1,4$; $a_q = 0,85$ [3, 4].

Магнитный поток на единицу длины по координате x

$$\dot{\Phi}_{m(l)} = \int_0^\infty \mu \dot{H}_{ms} e^{-\alpha z} = \frac{\mu}{\alpha} \dot{H}_{ms} = (1-j) \sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}} \dot{H}_{ms}. \quad (13)$$

Комплексное **единичное магнитное сопротивление** (в расчете на единицу длины по осям x и y) для потока $\dot{\Phi}_{m(l)}$

$$\boxed{\underline{Z}_{(l)M}} = \frac{\dot{H}_{ms}}{\dot{\Phi}_{m(l)}} = \frac{\alpha}{\mu} = R_{(l)M} + jX_{(l)M} = (1+j) \frac{l}{\mu\delta} = \boxed{\frac{j\omega}{\underline{Z}_{(l)}}} \quad (14)$$

где $R_{(l)M}$ - магнитное сопротивление материала в обычном понимании; $X_{(l)M}$ соответствует потерям на вихревые токи в металле.

Вектор Пойнтинга для удельной (на 1 м^2) мощности внутри металла

$$\underline{S}_{z(l)} = \frac{l}{2} \left(\dot{E}_m \dot{H}_m^* \right) = \underline{Z}_{(l)} \frac{|H_{ms}|^2}{2} e^{-2kz}. \quad (15)$$

При $z = 0$ вектор представляет собой **удельную полную мощность**, поступающую в полупространство через единицу поверхности,

$$\begin{aligned}
\boxed{\underline{S}_{(l)}} = P_{(l)} + jQ_{(l)} &= \boxed{(1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \frac{|H_{ms}|^2}{2}} = \\
&\begin{array}{cc}
\boxed{= \underline{z}_{(l)} \left| \frac{H_{ms}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \underline{z}_{(l)} A^2} & \boxed{= \frac{j}{2} \omega \underline{z}_{(l)M}^* \Phi_{m(l)}^2}
\end{array} \\
&\begin{array}{cc}
\text{(через параметры} & \text{(через параметры} \\
\text{электрической цепи)} & \text{магнитной цепи)}
\end{array}
\end{aligned} \tag{16}$$

Активная удельная мощность, Bm/m^2 , поступающая в полупространство, в общем случае

$$P_{(l)} = a_p \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \cdot \frac{H_{ms}^2}{2} = \frac{1}{2} a_p \omega \Phi_{m(l)}^2 (J_m \underline{Z}_{(l)M}), \tag{17}$$

где $a_p \approx 1$ для немагнитного и $a_p \approx 1,4$ для ферромагнитного материала [3].

Реактивная мощность соответственно

$$Q_{(l)} = a_q \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \cdot \frac{H_{ms}^2}{2} = a_q \omega \Phi_{m(l)}^2 (Re \underline{Z}_{(l)M}), \tag{18}$$

где $a_q = 1$ для немагнитного и $a_q \approx 0,85$ для ферромагнитного материала.

Мгновенное значение **удельного усилия** по оси z вычисляется как сила Ампера, действующая в данный момент времени на ток выделенного из металла провода единичного сечения и единичной длины, расположенного на расстоянии z от поверхности,

$$f(z, t) = j(t, z) B(t, z) = Re \dot{J} Re \dot{B} = \frac{1}{4} \left(\dot{J} + \dot{J}^* \right) \left(\dot{B} + \dot{B}^* \right),$$

где $\dot{J} = \gamma \dot{E} = \gamma E_{ms} e^{j\psi_E} e^{j\omega t} e^{-kz} e^{-jkz}$,

$\dot{B} = \mu H_{ms} e^{j\psi_H} e^{j\omega t} e^{-kz} e^{-jkz}$.

Выполнив некоторые преобразования в выражении для усилия, получаем

$$\begin{aligned}
 f(z, t) &= \frac{I}{4} \gamma \mu E_{ms} H_{ms} e^{-2kz} \left[\left(e^{j(\psi_E - \psi_H)} + e^{-j(\psi_E - \psi_H)} \right) + \left(e^{j(2\omega t - 2kz + \psi_E + \psi_H)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-j(2\omega t - 2kz + \psi_E + \psi_H)} \right) \right] = \frac{I}{2} \gamma \mu \left[\operatorname{Re} \left(\dot{E}_m H_m^* \right) + \operatorname{Re} \left(\dot{E}_m \dot{H}_m \right) \right] = \\
 &= \frac{I}{2} \gamma \mu E_{ms} H_{ms} e^{-2kz} \left[\cos(\psi_E - \psi_H) + \cos(2\omega t - 2kz + \psi_E + \psi_H) \right] = \\
 &= F_{y0}(z) + F_{y0}(z, t).
 \end{aligned} \tag{15a}$$

Первое слагаемое (15a) дает среднее за период усилие, а второе – переменную составляющую, пульсирующую с двойной частотой во времени.

С другой стороны, из (15) имеем $\frac{I}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{E}_m H_m^* \right) = P_{z(l)}$, и среднее усилие в (15a) принимает вид

$$F_{y0}(z) = \gamma \mu P_{z(l)} = \gamma \mu P_{(l)} e^{-2z/\delta} = F_{y0} e^{-2z/\delta}, \tag{15б}$$

т.е. среднее усилие в точке z отличается от входной удельной активной мощности в этой точке $P_{z(l)}$ в $(\mu\gamma)$ раз.

Полное удельное усилие (сжимающее металл давление) в точке z получается интегрированием удельного усилия от $z=0$ до z . Например, для среднего за период давления

$$P_{сж}(z) = \frac{I}{2} \mu \gamma \int_0^z \operatorname{Re} \left(\dot{E}_m H_m^* \right) dz = -P_{сжм} \left(1 - e^{-2z/\delta} \right), \tag{15в}$$

где $P_{сжм} = \frac{\delta}{2} \mu \gamma P_{(l)} = \frac{\delta}{2} F_{y0}$ – максимальное давление в металле (при $z > 2,5\delta$),

$F_{y0} = \gamma \mu P_{(l)}$ – максимальное усилие (на поверхности полупространства).

На рис. 2, в показаны зависимости $F_{y0}(z)/F_{y0}$ и $P_{сж}(z)/P_{сжм}$ от координаты z (см. также [7]).

1.2. Волна в диэлектрическом полупространстве ($\gamma = 0$)

В этом случае $\underline{\Gamma} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega/\nu$,

где $\nu = \frac{I}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ – скорость распространения волны в диэлектрике, например для воздуха

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = c = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Напряженности магнитного и электрического полей

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m &= \dot{H}_{ms} e^{-j\frac{\omega}{v}z}, \\ \dot{E}_m &= \mu v \dot{H}_{ms} e^{-j\frac{\omega}{v}z}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

или в “волновой” записи

$$H = \dot{H}_{ms} \sin\left(\omega t + \psi_S - \frac{\omega}{v}z\right). \quad (19 \text{ а})$$

Волновое сопротивление диэлектрика

$$\boxed{\underline{Z}_{(l)}} = \underline{Z}_D = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \mu v = \boxed{\sqrt{\mu/\varepsilon}}.$$

Для воздуха $Z_\varepsilon = \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o} = 377$ Ом, для трансформаторного масла $Z_{мас} = 243$ Ом. Длина волны в воздухе при $f = 50$ Гц составляет $\lambda = c/f = 6000$ км.

Как видно, в идеальном диэлектрике волна не затухает при движении по координате Z .

1.3. Волна в полупроводниковой среде ($\gamma \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$)

В этом случае $\boxed{\underline{\Gamma} = j\underline{k} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right) = j\omega\sqrt{\underline{\varepsilon}\mu}},$

где $\underline{k} = \beta - j\alpha$,

$$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}v} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} + 1}, \quad \alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}v} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} - 1},$$

$$\boxed{\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}} \quad - \text{ так называемая комплексная диэлектрическая проницаемость.}$$

Выражения (19) для напряженностей ЭМП принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m &= \dot{H}_{ms} e^{-jkz} , \\ \dot{E}_m &= \frac{\dot{H}_m}{\underline{Z}_{(I)}} = \frac{\dot{H}_{ms}}{\underline{Z}_{(I)}} e^{-jkz} , \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$\underline{Z}_{(I)} = \sqrt{\mu/\underline{\varepsilon}} = \xi e^{j\psi} ,$$

$$\psi = \arctg(\alpha/\beta) , \quad \xi = \mu\nu \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}}} ,$$

или в “волновой” записи

$$\left. \begin{aligned} H &= H_{ms} e^{-\alpha z} \sin(\omega t + \psi_S - \beta z) , \\ E &= \frac{H_{ms}}{\zeta} e^{-\alpha z} \sin(\omega t + \psi_S - \beta z - \psi) . \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

Как видно, волны затухают при движении по координате Z .

При $\gamma = 0$ (нет токов проводимости) получаем случай 2.

При $\varepsilon = 0$ (нет токов смещения) получаем случай 1.

Комплексная диэлектрическая проницаемость вводится также в случае [1, 2], если имеются потери энергии при изменении поляризации диэлектрика

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\dot{D}}{\dot{E}} = \varepsilon e^{-j\delta_\partial} ,$$

где δ_∂ называют углом диэлектрических потерь.

Введение комплексной $\underline{\varepsilon}$ позволяет исследовать диэлектрический нагрев среды с помощью рассматриваемых далее методов расчета.

Следует отметить также, что для учета потерь на магнитный гистерезис вводят комплексную магнитную проницаемость

$$\underline{\mu} = \dot{B}/\dot{H}.$$

2. непосредственный метод расчета электромагнитного поля в многослойной системе

2.1. ДВУХСЛОЙНОЕ ПРОВОДЯЩЕЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В этом случае рассмотренное в п.1.1 полупространство, обладающее свойствами μ_2, γ_2 , покрыто проводящим слоем металла толщиной d с другими свойствами μ_1, γ_1 .

В соответствии с (6) решения для напряженностей электромагнитного поля в слоях записываются

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= -\frac{I}{\underline{z}_{c1}} \left(A_1 e^{\alpha_1 z} - B_1 e^{-\alpha_1 z} \right) \quad \text{при } 0 < z < d, \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{I}{\underline{z}_{c2}} \left(A_2 e^{\alpha_2 z} - B_2 e^{-\alpha_2 z} \right) \quad \text{при } z > d \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= A_1 e^{\alpha_1 z} + B_1 e^{-\alpha_1 z}, \\ \dot{E}_{m2} &= A_2 e^{\alpha_2 z} + B_2 e^{-\alpha_2 z}, \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

где $\alpha_1 = (1+j)k_1 = \underline{\Gamma}_1$; $\alpha_2 = (1+j)k_2 = \underline{\Gamma}_2$; $\underline{z}_{c1,2} = \frac{j\omega \mu_{1,2}}{\underline{\Gamma}_{1,2}}$;

$$k_1 = \frac{I}{\delta_1} = \sqrt{\omega \mu_1 \gamma_1 / 2}; \quad k_2 = \sqrt{\omega \mu_2 \gamma_2 / 2}.$$

Граничные условия на границах слоев сводятся к следующим соотношениям тангенциальных составляющих напряженностей [1, 2, 3]:

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad E_{1t} = E_{2t}. \quad (22)$$

Кроме того, $A_2 = 0$, так как ЭМП затухает в слое 2 при $z \rightarrow \infty$.

Из (21) при $z = 0$ и $z = d$ с учетом (22) можно записать [3]

$$A_l + B_l = \dot{E}_{msl},$$

$$\frac{B_l}{A_l} = \frac{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1}{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2} \cdot e^{2\alpha_l d} = \frac{\underline{z}_{c2} + \underline{z}_{c1}}{\underline{z}_{c2} - \underline{z}_{c1}} \cdot e^{2\alpha_l d} = \frac{l}{M_{12}} \cdot e^{2\alpha_l d},$$

где $M_{12} = \frac{\underline{z}_{c2} - \underline{z}_{c1}}{\underline{z}_{c2} + \underline{z}_{c1}}.$

Принимаем, что при $z = 0$

$$\dot{H}_{ml}(0) = H_{msl} = A_l \frac{l}{\underline{z}_{c1}} \left(\frac{B_l}{A_l} - 1 \right) = \frac{A_l}{\underline{z}_{c1}} \left(\frac{e^{2\alpha_l d}}{M_{12}} - 1 \right),$$

откуда $A_l = \frac{\underline{z}_{c1} H_{ms}}{\left(\frac{e^{2\alpha_l d}}{M_{12}} - 1 \right)}.$

В результате из (21)

$$\frac{H_{ml}}{H_{msl}} = - \frac{l}{\left(\frac{e^{2\alpha_l d}}{M_{12}} - 1 \right)} \left(e^{\alpha_l z} - \frac{e^{2\alpha_l d}}{M_{12}} e^{-\alpha_l z} \right) = \frac{\left(e^{\alpha_l (d-z)} - M_{12} e^{-\alpha_l (d-z)} \right)}{e^{\alpha_l d} - M_{12} e^{-\alpha_l d}}. \quad (216)$$

Единичное электрическое сопротивление двухслойного проводника

$$\underline{Z}_{(l)} = \frac{\dot{E}_{msl}}{\dot{H}_{msl}} = \frac{j\omega\mu_1}{\alpha_l} \frac{A_l + B_l}{B_l - A_l} = \frac{\alpha_l}{\gamma_l} \frac{sh\alpha_l d + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} ch\alpha_l d}{ch\alpha_l d + \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} sh\alpha_l d} = \underline{z}_{c1} \frac{th\alpha_l d + \frac{\underline{z}_{c2}}{\underline{z}_{c1}}}{\frac{\underline{z}_{c2}}{\underline{z}_{c1}} th\alpha_l d + 1}. \quad (23)$$

При $\frac{d}{\delta_l} \gg 1$ (толщина верхнего слоя превышает глубину проникновения) выражение (23) превращается в (12) для однослойного проводника $\underline{Z}_{(l)c} = \alpha_l / \gamma_l$ с параметрами среды γ_l, μ_l .

Отношение сопротивлений двухслойного (23) и однослойного с γ_l, μ_l (11) проводников записывается как

$$\frac{\underline{Z}_{(l)}}{\underline{Z}_{(l)c}} = \frac{sh\alpha_l d + \sqrt{\frac{\mu_2 \gamma_1}{\mu_1 \gamma_2}} ch\alpha_l d}{ch\alpha_l d + \sqrt{\frac{\mu_2 \gamma_1}{\mu_1 \gamma_2}} sh\alpha_l d}.$$

Если однослойный проводник имеет γ_2, μ_2 , то отношение сопротивлений

$$\frac{\underline{Z}_{(I)}}{\underline{Z}_{(I)lc}} = \frac{\underline{\alpha}_1}{\underline{\alpha}_2} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{sh \underline{\alpha}_1 d + \sqrt{\gamma_1 \mu_2 / \gamma_2 \mu_1} ch \underline{\alpha}_1 d}{ch \underline{\alpha}_1 d + \sqrt{\gamma_1 \mu_2 / \gamma_2 \mu_1} sh \underline{\alpha}_1 d}.$$

Расчет мощностей производится по (16) с учетом (23).

2.2. ТРЕХСЛОЙНАЯ СИСТЕМА

Рассматриваем систему рис.4, в которой среда 1 и 3 - диэлектрик (например, воздух), 2 и 4 - металлы с разными свойствами.

Решение для напряженностей поля записывается согласно (6). Из граничных условий на границах I, II, III и при $z \rightarrow \infty$ с учетом (22) получаем $A_4 = 0$, а также

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m2} &= A_2 + B_2 = \dot{E}_{ms}, \\ \dot{H}_{m2} &= \frac{\underline{\alpha}_2}{j\omega\mu_2} (A_2 - B_2) = \dot{H}_{ms}, \end{aligned} \right\} \text{ справедливо при } z = 0, \quad (24)$$

$$\dot{E}_{m2} = \dot{E}_{m3} \text{ и } \dot{H}_{m2} = \dot{H}_{m3}, \quad \text{справедливо при } z = d, \text{ т.е.}$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 e^{\underline{\alpha}_2 d} + B_2 e^{-\underline{\alpha}_2 d} &= A_3 e^{\underline{\Gamma}_3 d} + B_3 e^{-\underline{\Gamma}_3 d}, \\ \frac{\underline{\alpha}_2}{\mu_2} (A_2 e^{\underline{\alpha}_2 d} - B_2 e^{-\underline{\alpha}_2 d}) &= \frac{\underline{\Gamma}_3}{\mu_3} (A_3 e^{\underline{\Gamma}_3 d} - B_3 e^{-\underline{\Gamma}_3 d}), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

при $z = d + a$ справедливо $\dot{E}_{m3} = \dot{E}_{m4}$ и $\dot{H}_{m3} = \dot{H}_{m4}$, т.е.

$$\left. \begin{aligned} A_3 e^{\underline{\Gamma}_3(d+a)} + B_3 e^{-\underline{\Gamma}_3(d+a)} &= B_4 e^{-\underline{\alpha}_4(d+a)}, \\ -\frac{\underline{\Gamma}_3}{\mu_3} (A_3 e^{\underline{\Gamma}_3(d+a)} - B_3 e^{-\underline{\Gamma}_3(d+a)}) &= \frac{\underline{\alpha}_4}{\mu_4} B_4 e^{-\underline{\alpha}_4(d+a)}. \end{aligned} \right\}$$

После решения (24), (25), (26) находим постоянные

$$A_2 = \frac{j\omega\mu_2 \dot{H}_{ms}}{\underline{\alpha}_2 (1 - B_2/A_2)}, \quad (27)$$

где
$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{C\alpha_2 - \mu_2}{C\alpha_2 + \mu_2} e^{2\alpha_2 d},$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\mu_3 \left[\mu_4 \Gamma_3 (1 + e^{2\Gamma_3 a}) - \mu_3 \alpha_4 (1 - e^{2\Gamma_3 a}) \right]}{\Gamma_3 \left[\mu_4 \Gamma_3 (1 - e^{2\Gamma_3 a}) - \mu_3 \alpha_4 (1 + e^{2\Gamma_3 a}) \right]}, \\ \frac{B_3}{A_3} &= \frac{\mu_3 \alpha_4 + \mu_4 \Gamma_3}{\mu_4 \Gamma_3 - \mu_3 \alpha_4} e^{2\Gamma_3 (d+a)}, \\ A_3 &= A_2 e^{(\alpha_2 - \Gamma_3)d} \frac{1 + \frac{B_2}{A_2} e^{-2\alpha_2 d}}{1 + \frac{B_3}{A_3} e^{-2\Gamma_3 d}}, \\ B_4 &= A_3 e^{(\Gamma_3 + \alpha_4)(d+a)} \left[1 + \frac{B_3}{A_3} e^{-2\Gamma_3 (d+a)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Входная удельная мощность определяется аналогично (15) при $z = 0$ с учетом (24)

$$\underline{S}_{(l)} = P_{(l)} + jQ_{(l)} = \frac{l}{2} \left(\dot{E}_{ms} \cdot H_{ms}^* \right) = \frac{\gamma_2}{2\alpha_2} \left(\dot{A}_2 \dot{A}_2^* - \dot{A}_2 \dot{B}_2^* + \dot{B}_2 \dot{A}_2^* - \dot{B}_2 \dot{B}_2^* \right). \quad (29)$$

3. ВОЛНОВОЙ МЕТОД РАСЧЕТА [1, 2, 3]

3.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Этот метод использует представление решений для H и E слоя в виде сумм падающих, отраженных и преломленных волн (рис.5,а), что следует из (6). Действительно, в пространстве 1 (рис. 5,б), согласно (6), существуют падающая волна

$E_{nad} = E_{p_l}(z) = B_l e^{j\omega t} e^{-\Gamma_l z}$, движущаяся вправо (в направлении оси z) со скоростью ω/k_l , а также встречная волна $E_{opr} = E_{o_l}(z) = A_l e^{j\omega t} e^{\Gamma_l z}$, движущаяся с такой же скоростью в обратном направлении и называемая отраженной. Отраженная волна связана с падающей коэффициентом отражения M_{opr} , т.е. $\dot{E}_{opr} = M_{opr} \dot{E}_{nad}$, $\dot{H}_{opr} = -M_{opr} \dot{H}_{nad}$. Падающая волна частично проникает в пространство 2 с коэффи-

циентом преломления N_{np} и называется преломленной или проникающей [2, 3]

$$\dot{E}_{np} = N_{np} \dot{E}_{na\partial} , \quad \dot{H}_{np} = N_{np} \dot{H}_{na\partial} .$$

Из граничных условий (22) можно записать для тангенциальных составляющих напряженностей ЭМП при $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{na\partial} + \dot{E}_{omp} &= \dot{E}_{np} , \\ \dot{H}_{na\partial} + \dot{H}_{omp} &= \dot{H}_{np} \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{na\partial} + M_{omp} \dot{E}_{na\partial} &= \dot{E}_{np} , \\ \dot{H}_{na\partial} - M_{omp} \dot{H}_{na\partial} &= \dot{H}_{np} , \end{aligned} \right\} . \quad (30)$$

Комплексные амплитуды напряженностей падающих и преломленных волн каждого слоя связаны волновым сопротивлением слоя (12), т.е. для первого и второго слоев

$$\left. \begin{aligned} \underline{z}_{c1} = \underline{Z}_{(1)1} &= \dot{E}_{m1} / \dot{H}_{m1} = \dot{E}_{mna\partial} / \dot{H}_{mna\partial} = j\omega\mu_1 / \underline{\Gamma}_1 , \\ \underline{z}_{c2} = \underline{Z}_{(1)2} &= \dot{E}_{m2} / \dot{H}_{m2} = \dot{E}_{mnp} / \dot{H}_{mnp} = j\omega\mu_2 / \underline{\Gamma}_2 . \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Далее индекс (1) единичного сопротивления опускаем. После деления уравнений в (30) с учетом (31) получаем

$$\frac{1 + M_{12}}{1 - M_{12}} \underline{z}_{c1} = \underline{z}_{c2} ,$$

где коэффициент отражения волны в среде 1 от границы 12 ($z = 0$)

$$M_{12} = \frac{\dot{E}_{omp}}{\dot{E}_{na\partial}} = - \frac{\dot{H}_{omp}}{\dot{H}_{na\partial}} = \frac{\underline{z}_{c2} - \underline{z}_{c1}}{\underline{z}_{c2} + \underline{z}_{c1}} , \quad (32)$$

а затем

$$\left. \begin{aligned} N_{12} &= \frac{\dot{E}_{np}}{\dot{E}_{na\partial}} = 1 + M_{12} = \frac{2\underline{z}_{c2}}{\underline{z}_{c2} + \underline{z}_{c1}} , \\ N_{12H} &= \frac{\dot{H}_{np}}{\dot{H}_{na\partial}} = 1 - M_{12} = \frac{2\underline{z}_{c1}}{\underline{z}_{c2} + \underline{z}_{c1}} . \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

3.2. ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛНОВОГО МЕТОДА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

В действительности имеет место многократное отражение волны от обеих границ слоя, в результате чего напряженности (6) ЭМП получаются суммированием бесконечного количества волн, двигающихся по оси z в прямом и встречном направлениях.

В среде 1 (рис. 5,б, $z < 0$)

Сумма первичной падающей волны $\dot{E}_{mp1} = \dot{E}_{msp} e^{-\Gamma_1 z}$,
отраженной волны $\dot{E}_{mol} = \dot{E}_{mp1(z=0)} \cdot M_{12} e^{\Gamma_1 z} = \dot{E}_{msp} \cdot M_{12} \cdot e^{\Gamma_1 z}$,
бесконечного ряда волн, обусловленных внутренним отражением в среде 2 и сводящихся к $E_{msp} N_{12} M_{23} N_{21} \sigma e^{-2\Gamma_2 d} e^{\Gamma_1 z}$, дает [3, 4]

$$\dot{E}_{m1}(z) = \dot{E}_{msp} \left[e^{-\Gamma_1 z} + M_{12} e^{\Gamma_1 z} + N_{12} M_{23} N_{21} \sigma e^{-2\Gamma_2 d} e^{\Gamma_1 z} \right], \quad (34)$$

где $\sigma = \frac{1}{1 - M_{23} M_{21} e^{-2\Gamma_2 d}}$ - коэффициент, полученный при суммировании бесконечного ряда отраженных волн;

$$N_{12} = 1 + M_{12} = \frac{2\underline{z}_{c2}}{\underline{z}_{c1} + \underline{z}_{c2}}; \quad N_{21} = 2 \frac{\underline{z}_{c1}}{\underline{z}_{c1} + \underline{z}_{c2}};$$

$$M_{21} = \frac{\underline{z}_{c1} - \underline{z}_{c2}}{\underline{z}_{c1} + \underline{z}_{c2}}; \quad M_{23} = \frac{\underline{z}_{c3} - \underline{z}_{c2}}{\underline{z}_{c3} + \underline{z}_{c2}} \quad - \text{коэффициенты преломления и отражения на}$$

границах соответствующих слоев, приведенные в верхней части рис. 5,б. Там же показана схема отражения, преломления и суперпозиции волн.

В среде 2 ($0 < z < d$)

Напряженности ЭМП представляются суммами волн, перемещающихся

- вправо $\dot{E}_{msp} N_{12} \sigma e^{-\Gamma_2 z}$,

- влево $\dot{E}_{msp} N_{12} M_{23} \sigma e^{-\Gamma_2 d} e^{-\Gamma_2(d-z)}$,

т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz}(z) &= \dot{E}_{ms} \sigma \left[e^{-\Gamma_2 z} + M_{23} e^{-\Gamma_2 d} e^{-\Gamma_2(d-z)} \right], \\ \dot{H}_{mz}(z) &= \dot{H}_{ms} \sigma \left[e^{-\Gamma_2 z} - M_{23} e^{-\Gamma_2 d} e^{-\Gamma_2(d-z)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где $\dot{E}_{ms} = \dot{E}_{msp} N_{12}$, $\dot{H}_{ms} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \dot{E}_{ms}$.

Напряженности магнитного поля на “входной” ($z = 0$) и “выходной” ($z = d$) для волны сторонах слоя 12 и 23 из (35) выражаются в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m2}(0) &= \frac{1 - M_{23}e^{-2\Gamma_2 d}}{1 - M_{23}M_{21}e^{-2\Gamma_2 d}} \dot{H}_{ms}, \\ \dot{H}_{m2}(d) &= \frac{1 - M_{23}}{e^{\Gamma_2 d} - M_{23}M_{21}e^{-2\Gamma_2 d}} \dot{H}_{ms} = H_{m2}(0) \frac{1 - M_{23}}{e^{-2\Gamma_2 d} - M_{23}M_{21}e^{-2\Gamma_2 d}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

После подстановки M_{21} и M_{23} в (35) получаем

$$\dot{H}_{m2}(z) = \dot{H}_{ms} \frac{z_{c3} sh \Gamma_2 (d - z) + z_{c2} ch \Gamma_2 (d - z)}{z_{c3} \left(1 + \frac{z_{c2}}{z_{c3}} \cdot \frac{z_{c2}}{z_{c1}} \right) sh \Gamma_2 d + z_{c2} \left(1 + \frac{z_{c3}}{z_{c1}} \right) ch \Gamma_2 d} \left(1 + \frac{z_{c2}}{z_{c1}} \right), \quad (37)$$

или

$$\dot{H}_{m2}(z) = \dot{H}_{ms} \frac{sh \Gamma_2 (d - z) + \frac{z_{c2}}{z_{c3}} ch \Gamma_2 (d - z)}{\left(1 + \frac{z_{c2}}{z_{c3}} \cdot \frac{z_{c2}}{z_{c1}} \right) sh \Gamma_2 d + \frac{z_{c2}}{z_{c3}} \left(1 + \frac{z_{c3}}{z_{c1}} \right) ch \Gamma_2 d} \left(1 + \frac{z_{c2}}{z_{c1}} \right) \quad (37a)$$

Коэффициент ослабления волны при прохождении ее через слой 2 на основании (36) и (37a)

$$\underline{k}_{oc} = \frac{\dot{H}_{m2}(d)}{\dot{H}_{m2}(0)} = \frac{1 - M_{23}}{e^{\Gamma_2 d} - M_{23}e^{-\Gamma_2 d}} = \frac{1}{\frac{z_{c3}}{z_{c2}} sh \Gamma_2 d + ch \Gamma_2 d}. \quad (38)$$

Поскольку для металла $\Gamma_2 = (1 + j)k_2$ и $\Gamma_2 d = (1 + j)\frac{d}{\delta_2} = (1 + j)d_*$, то с учетом [9]

$sh \Gamma_2 d = sh d_* \cos d_* + j ch d_* \sin d_*$ и $ch \Gamma_2 d = ch d_* \cos d_* + j sh d_* \sin d_*$ получаем

$$\underline{k}_{oc} = \frac{1}{\frac{z_{c3}}{z_{c2}} (sh d_* \cos d_* + j ch d_* \sin d_*) + (ch d_* \cos d_* + j sh d_* \sin d_*)},$$

где $d_* = d/\delta_2 = dk_2$ - отношение толщины слоя к глубине проникновения ЭМП.

При $z_{c1} \gg z_{c2}$, $z_{c3} \gg z_a$ (например, слои 1 и 3 заполнены диэлектриком, а 2 - металлом) и $\underline{z}_2 = \underline{\alpha}_2 / \gamma_2$ имеем $M_{23} = M_{21} = I$. Тогда из (35), (37а) для напряженности магнитного поля и плотности тока в слое 2 получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m2}(z) &= \dot{H}_{ms} \frac{sh \underline{\alpha}_2 (d-z)}{sh \underline{\alpha}_2 d}, \\ \dot{J}_{m2}(z) &= \gamma_2 \dot{E}_{m2}(z) = \underline{\alpha}_2 \dot{H}_{ms} \frac{ch \underline{\alpha}_2 (d-z)}{sh \underline{\alpha}_2 d}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

В этом случае напряженность и плотность тока на поверхности 1 - 2 слоя 2 ($z = 0$)

$$\dot{H}_{m2}(0) = \dot{H}_{ms}, \quad \dot{J}_{m2}(0) = \underline{\alpha}_2 \dot{H}_{ms} cth \underline{\alpha}_2 d = \gamma_2 \dot{E}_{m2}(0),$$

а на поверхности 2 - 3 ($z = d$) соответственно

$$\dot{H}_{m2}(d) = 0, \quad \dot{J}_{m2}(d) = \underline{\alpha}_2 \dot{H}_{ms} / sh \underline{\alpha}_2 d.$$

При этом \underline{k}_{oc} оказывается равным 0, т.е. волна \dot{H} полностью затухает в слое. Следует отметить также, что в (35) \dot{H}_{ms} является напряженностью магнитного поля на поверхности слоя в случае его бесконечно большой толщины d , что видно из (36) при $d \rightarrow \infty$. С большой точностью, однако, она равна напряженности поля на поверхности слоя и в случае его ограниченной толщины [3].

Схема отражения и наложения волн ЭМП показана на рис. 6. При этом магнитное поле H отражается от границы с противоположным знаком, а электрическое E - с совпадающим [3].

Распределение **плотности активной мощности** (в единице объема, $Вт/м^3$) в слое [3]

$$w_2(z) = \frac{I}{2\gamma_2} |\dot{J}_m(z)|^2 = \frac{\varphi_1}{d} \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\gamma_2}} \frac{|\dot{H}_{ms}|^2}{2}, \quad (40)$$

где $\varphi_1 = 2k_2 d \frac{ch 2k_2 (d-z) + \cos 2k_2 (d-z)}{ch 2k_2 d - \cos 2k_2 d}$, поскольку из (39) с учетом [9, с.181, 364] модуль $|\dot{J}_m(z)|$ записывается как

$$|\dot{J}_m(z)| = k_2 H_{ms} \frac{\sqrt{sh^2 k_2 (d-z) + cos^2 k_2 (d-z)}}{\sqrt{sh^2 k_2 d + sin^2 k_2 d}} = k_2 H_{ms} \sqrt{\frac{sh 2k_2 (d-z) + cos 2k_2 (d-z)}{ch 2k_2 d - cos 2k_2 d}}.$$

Удельная мощность, поступающая через единицу поверхности на расстоянии z от границы слоя, определяется из вектора Пойнтинга с учетом (39) и $\underline{\alpha} = (1+j)/\delta$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{(l)2}(z) &= \frac{1}{2} \left[\dot{E}_m H_m^* \right] = \frac{1}{2} H_{ms}^2 \frac{\underline{\alpha}}{\gamma} \left[\frac{ch \underline{\alpha} (d-z) sh \underline{\alpha}^* (d-z)}{sh \underline{\alpha} d sh \underline{\alpha}^* d} \right] = \\ &= \frac{1}{2} H_{ms}^2 \frac{(1+j)}{\gamma \delta} \frac{\left(e^{(1-j)(d-z)/\delta} - e^{-(1-j)(d-z)/\delta} \right) \left(e^{(1+j)(d-z)/\delta} + e^{-(1+j)(d-z)/\delta} \right)}{\left(e^{(1-j)d/\delta} - e^{-(1-j)d/\delta} \right) \left(e^{(1+j)d/\delta} - e^{-(1+j)d/\delta} \right)} = \quad (40a) \\ &= P_{(l)2}(z) + jQ_{(l)2}(z), \end{aligned}$$

где $P_{(l)2}(z) = \frac{1}{2} Re \left(\dot{E}_m H_m^* \right) = P_{(l)} \frac{sh \left(2 \frac{d-z}{2} \right) + sin \left(2 \frac{d-z}{2} \right)}{ch \frac{2d}{\delta} - cos \frac{2d}{\delta}}$ - активная «входная»

мощность;

$$Q_{(l)2}(z) = P_{(l)} \frac{sh \left(2 \frac{d-z}{2} \right) - sin \left(2 \frac{d-z}{2} \right)}{ch \frac{2d}{\delta} - cos \frac{2d}{\delta}} - \text{реактивная «входная» мощность;}$$

$P_{(l)} = \frac{1}{\gamma \delta} \frac{H_{ms}^2}{2}$ - активная удельная мощность, поступающая в слой при его бесконечной толщине (17).

В общем случае удельная мощность слоя, приходящаяся на единицу поверхности, Bm/m^2 , определяется из вектора Пойнтинга (15) как разность его значений при $z = 0$ и $z = d$.

Из (35) для напряженности \dot{E}_{m2} при $z = 0$ и $z = d$ получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m2}(0) &= \dot{E}_{ms} \frac{1 + M_{23} e^{-2\Gamma_2 d}}{1 - M_{23} M_{21} e^{-2\Gamma_2 d}}, \\ \dot{E}_{m2}(d) &= \dot{E}_{ms} \frac{1 + M_{23}}{e^{\Gamma_2 d} - M_{23} M_{21} e^{-\Gamma_2 d}}. \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

Если (36) и (36а) подставить в (15) и **принять вещественными коэффициенты** M_{23} и M_{21} [3], то удельная мощность, “входящая” в слой при $z = 0$, выразится в виде

$$\begin{aligned}\underline{S}_{(I)}(0) &= \frac{|\dot{H}_{ms}|^2}{2} \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \frac{(1 + M_{23}e^{-2(l+j)k_2d})(1 - M_{23}e^{-2(l-j)k_2d})}{(1 - M_{23}M_{21}e^{-2(l+j)k_2d})(1 - M_{23}M_{21}e^{-2(l-j)k_2d})} = \\ &= \frac{H_{ms}^2}{2} \frac{(1+j)k_2}{\gamma_2} \frac{e^{2k_2d} - j2M_{23} \sin 2k_2d - M_{23}^2 e^{-2k_2d}}{e^{2k_2d} - 2M_{23}M_{21} \cos 2k_2d + M_{23}^2 M_{21}^2 e^{-2k_2d}},\end{aligned}\quad (40a)$$

а мощность, «выходящая» из слоя, при $z = d$ соответственно

$$\underline{S}_{(I)}(d) = \frac{H_{ms}^2}{2} \frac{(1+j)k_2}{\gamma_2} \frac{1 - M_{23}^2}{e^{2k_2d} - 2M_{23}M_{21} \cos 2k_2d + M_{23}^2 M_{21}^2 e^{-2k_2d}}. \quad (40б)$$

Тогда удельная мощность слоя 2 равна

$$\underline{S}_{(I)2} = \underline{S}_{(I)}(0) - \underline{S}_{(I)}(d) = P_{(I)2} + jQ_{(I)2}. \quad (40в)$$

Активная удельная мощность слоя 2, Вт/м²,

$$P_{(I)2} = \chi_2 \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\gamma_2}} \frac{H_{ms}^2}{2}, \quad (41)$$

$$\text{где } \chi_2 = \frac{e^{2k_2d} - M_{23}^2 e^{-2k_2d} + 2M_{23} \sin 2k_2d - 1 + M_{23}^2}{e^{2k_2d} + M_{21}^2 M_{23}^2 e^{-2k_2d} - 2M_{21}M_{23} \cos 2k_2d}.$$

В частном случае при $M_{21} = M_{23} = 1$

$$\chi_2 = \frac{\sin 2k_2d + \sin 2k_2d}{\cos 2k_2d - \cos 2k_2d}.$$

Реактивная удельная мощность слоя 2 соответственно

$$Q_{(I)2} = \xi_2 \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\gamma_2}} \frac{H_{ms}^2}{2}, \quad (42)$$

$$\text{где } \xi_2 = \frac{e^{2k_2d} - M_{23}^2 e^{-2k_2d} - 2M_{23} \sin 2k_2d - I + M_{23}^2}{e^{2k_2d} + M_{21}^2 M_{23}^2 e^{-2k_2d} - 2M_{21} M_{23} \cos 2k_2d},$$

или в частном случае, при $M_{21} = M_{23} = I$,

$$\chi_2 = \frac{sh 2k_2d - \sin 2k_2d}{ch 2k_2d - \cos 2k_2d}.$$

Коэффициент мощности определяется как

$$\cos \varphi_2 = \frac{\chi_2}{\sqrt{\chi_2^2 + \xi^2}}. \quad (43)$$

Зависимости χ_2 , ξ_2 , $\cos \varphi$ приведены на рис. 7.

ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ $\mu_2 = \mu_{2*} \mu_0 = \mu_{2*} 4\pi 10^{-7}$, ГН/М; $\omega = 2\pi f$;
 $\gamma_2 = \frac{I}{\rho_2}$ **И ПРИНЯТЬ В СООТВЕТСТВИИ С [7] ИЗ ГРАНИЧНЫХ УС-**
ЛОВИЙ «ИНДУКТОР-ДЕТАЛЬ» (ПРИ ИХ ПЛОТНОМ ПРИЛЕГАНИИ)
 $H_{ms} = \sqrt{2} I_1 w_{1,0}$ **- ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ АМПЕРВИТКОВ НА**
ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ ПО КООРДИНАТЕ У, ТО (41) ПРИМЕТ ВИД

$$P_{(I)2} = \sqrt{\frac{I}{2} 4\pi 10^{-7} 2\pi (I_1 w_{10})^2 \sqrt{\rho_2 \mu_{2*} f}} = 2 \cdot 10^{-6} (I_1 w_{10})^2 \sqrt{\rho_2 \mu_{2*} f} \chi \text{ [кВт/м}^2\text{]}. \quad (41a)$$

Полученное выражение совпадает с приведенным в [7].

В соответствии с (15а) и учетом (40а) можно найти распределение по z нормально-го среднего усилия в слое [7]

$$F_{y\partial}(z) = \mu \gamma P_{(I)2}(z) = F_{y\partial} \frac{sh\left(2\frac{d-z}{\delta}\right) + \sin\left(2\frac{d-z}{\delta}\right)}{ch\frac{2d}{\delta} - \cos\frac{2d}{\delta}} \quad (40б)$$

и давления

$$P_{сжс}(z) = \mu \gamma \int_0^z P_{(I)2}(z) dz = P_{сжс} \left[1 - \frac{ch\left(2\frac{d-z}{\delta}\right) - \cos\left(2\frac{d-z}{\delta}\right)}{ch\frac{2d}{\delta} - \cos\frac{2d}{\delta}} \right]. \quad (40в)$$

На рис. 6,б показаны распределения $F_{y0}(z)/F_{y0}, P_{сж}(z)/P_{сжт}$ [7], где наибольшее давление при $z = \delta$, Н/м²:

$$P_{сжт} = \frac{\delta}{2} \mu \gamma P_{(1)} = 62 \cdot 10^{-8} H_s^2 \mu. \quad (40г)$$

В среде 3 ($z > d$)

Волна в среде 3 образуется вследствие наложения поля $\dot{E}_{msp} N_{12}$, проникающего в среду 2, а также суммы его многократных отражений в среде 2 - $\dot{E}_{msp} N_{12} \sigma$, преломленных на границе 2 - 3 с коэффициентом N_{23} и приобретающих на поверхности $z = d$ со стороны среды 3 равнодействующее значение $\dot{E}_{msp} N_{12} \sigma e^{-\Gamma_2 d} N_{23}$. Она перемещается вправо с коэффициентом $e^{-\Gamma_2(z-d)}$, т.е.

$$\dot{E}_{m3}(z) = \dot{E}_{msp} N_{12} N_{23} \sigma e^{-\Gamma_2 d} e^{-\Gamma_3(z-d)}. \quad (44)$$

3.3. Система с произвольным количеством слоев

Ограничимся лишь рис. 8 [3], поясняющим процедуру расчета и суперпозицию волн \dot{E} и \dot{H} в такой системе.

4. МЕТОД Е-Н-ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ [8]

Запишем уравнения (6) для i -го слоя в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^{(i)}(z) &= A_i e^{-\Gamma_i z} + B_i e^{\Gamma_i z}, \\ \dot{H}_m^{(i)}(z) &= \frac{1}{\underline{z}_{ci}} \left(A_i e^{-\Gamma_i z} - B_i e^{\Gamma_i z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где $\underline{z}_{ci} = \underline{Z}_{(1)i} = \frac{j\omega\mu_i}{\Gamma_i}$ - волновое сопротивление i -го слоя. Для металла $\underline{z}_{ci} = (1+j)k_i/\gamma_i$.

Начало координат расположено на «входной» стороне слоя, поэтому при $z = 0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{lm}^{(i)} &= A_i + B_i, \\ H_{lm}^{(i)} &= \frac{l}{z_{ci}} A_i - \frac{l}{z_{ci}} B_i, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$A_i = \frac{l}{2} (\dot{E}_{lm}^{(i)} + z_{ci} \dot{H}_{lm}^{(i)}), \quad B_i = \frac{l}{2} (\dot{E}_{lm}^{(i)} - z_{ci} \dot{H}_{lm}^{(i)}).$$

Подстановка постоянных A_i, B_i в (45) дает

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^{(i)}(z) &= \dot{E}_{lm}^{(i)} ch \Gamma_i z - z_{ci} \dot{H}_{lm}^{(i)} sh \Gamma_i z, \\ \dot{H}_m^{(i)}(z) &= \frac{-l}{z_{ci}} \dot{E}_{lm}^{(i)} sh \Gamma_i z + \dot{H}_{lm}^{(i)} ch \Gamma_i z. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

При $z = d_i$ (на «выходной» стороне слоя « i »)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{2m}^{(i)} &= \dot{E}_{lm}^{(i)} ch \Gamma_i d_i - z_{ci} \dot{H}_{lm}^{(i)} sh \Gamma_i d_i, \\ \dot{H}_{2m}^{(i)} &= \frac{l}{z_{ci}} \dot{E}_{lm}^{(i)} sh \Gamma_i d_i + \dot{H}_{lm}^{(i)} ch \Gamma_i d_i. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Система уравнений (47) соответствует пассивному четырехполюснику (рис. 9), входными величинами которого являются $\dot{E}_{lm}^{(i)}, \dot{H}_{lm}^{(i)}$, выходными - $\dot{E}_{2m}^{(i)}, \dot{H}_{2m}^{(i)}$, а z_{ci} носит название **характеристического сопротивления** четырехполюсника.

Поскольку выходные величины $\dot{E}_{2m}^{(i)}, \dot{H}_{2m}^{(i)}$ являются одновременно входными величинами $(i + 1)$ четырехполюсника, то цифры 1 и 2 в индексах можно опустить и за-

писать (47) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(i+1)} \\ \dot{H}_m^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch \Gamma_i d_i & -z_{ci} sh \Gamma_i d_i \\ -\frac{sh \Gamma_i d_i}{z_{ci}} & ch \Gamma_i d_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(i)} \\ \dot{H}_m^{(i)} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Можно также выразить величины i -го четырехполюсника через величины $(i+1)$ четырехполюсника (обратные зависимости).

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(i)} \\ \dot{H}_m^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\underline{\Gamma}_i d_i & \underline{z}_{ci} sh\underline{\Gamma}_i d_i \\ \frac{sh\underline{\Gamma}_i d_i}{\underline{z}_{ci}} & ch\underline{\Gamma}_i d_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(i+1)} \\ \dot{H}_m^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i B_i \\ C_i D_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(i+1)} \\ \dot{H}_m^{(i+1)} \end{bmatrix} = [T_i] \times \begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(i+1)} \\ \dot{H}_m^{(i+1)} \end{bmatrix}, \quad (48a)$$

где постоянные четырехполюсника (элементы матрицы $[T_i]$)

$$\left. \begin{aligned} A_i &= ch\underline{\Gamma}_i D_i, \\ B_i &= \underline{z}_{ci} sh\underline{\Gamma}_i d_i, \\ C_i &= sh(\underline{\Gamma}_i D_i) / \underline{z}_{ci}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Для слоев, расположенных слева от обмотки индуктора (рис. 12), их величины обозначены штрихами, уравнения связи входных величин с выходными идентичны (48), т.е.

$$\begin{bmatrix} E_m^{(i)'} \\ H_m^{(i)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\underline{\Gamma}_i' d_i' & -\underline{z}_{ci}' sh\underline{\Gamma}_i' d_i' \\ -sh \frac{\underline{\Gamma}_i' d_i'}{\underline{z}_{ci}'} & ch\underline{\Gamma}_i' d_i' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_m^{(i+1)'} \\ H_m^{(i+1)'} \end{bmatrix}.$$

Параметры Т-образного i -го четырехполюсника (рис. 9,б) можно выразить через его постоянные A_i, B_i, C_i, D_i согласно [1, 8]

$$\left. \begin{aligned} \underline{z}_{Ai} &= \frac{ch\underline{\Gamma}_i d_i - 1}{sh\underline{\Gamma}_i d_i} \underline{z}_{ci} = \underline{z}_{ci} th(0,5\underline{\Gamma}_i d_i), \\ \underline{z}_{Bi} &= \underline{z}_{ci} / sh\underline{\Gamma}_i d_i. \end{aligned} \right\} \quad (49a)$$

Если слой заполнен сторонним током с плотностью $\dot{j}_{стм}$, то четырехполюсник является активным и параллельно его среднему сопротивлению \underline{z}_{Bi} включается источник тока $\underline{j}_m^{(i)}$, являющегося по своему смыслу и размерности линейной плотностью тока или **линейной нагрузкой** активной зоны (например, обмотки индуктора) [8].

$$\underline{j}_m^{(i)} = \frac{\dot{j}_{стм}}{\underline{\Gamma}_i} sh\underline{\Gamma}_i d_i. \quad (49б)$$

Входное сопротивление i -го четырехполюсника выражается в виде [1, 8]

$$\underline{z}_{i\delta x} = \frac{\dot{E}_m^{(i)}}{\dot{H}_m^{(i)}} = \underline{z}_{ci} \frac{\underline{z}_{i+1,\delta x} + \underline{z}_{ci} th\underline{\Gamma}_i d_i}{\underline{z}_{i+1,\delta x} th\underline{\Gamma}_i d_i + \underline{z}_{ci}}, \quad (50)$$

где входное сопротивление $(i+1)$ четырехполюсника $\underline{z}_{i+1,ex} = \dot{E}_m^{(i+1)} / \dot{H}_m^{(i+1)}$ (далее индекс «ex» опускаем).

Если $(i+1)$ слой представляет собой металлическое полупространство (или его толщина d_{i+1} в 2-3 раза превышает глубину проникновения ЭМП δ_{i+1}) и имеет волновое сопротивление (11)

$$\underline{z}_{c,i+1} = \frac{j\omega\mu_{i+1}}{\alpha_{i+1}} = \frac{\alpha_{i+1}}{\gamma_{i+1}} = \frac{(1+j)k_{i+1}}{\gamma_{i+1}} = \underline{z}_{i+1},$$

то входное сопротивление (50) i -го четырехполюсника, соответствующее двухслойному проводящему полупространству, записывается как

$$\underline{z}_i = \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \frac{sh\alpha_i d_i + \frac{\mu_{i+1}k_i}{\mu_i k_{i+1}} ch\alpha_i d_i}{\frac{\mu_{i+1}k_i}{\mu_i k_{i+1}} sh\alpha_i d_i + ch\alpha_i d_i}, \quad (50a)$$

где $(\mu_{i+1}k_i / \mu_i k_{i+1}) = (\underline{z}_{i+1} / \underline{z}_{ci})$;

$$(\alpha_i / \gamma_i) = \underline{z}_{ci}.$$

Легко видеть, что это выражение совпадает с (23).

Если обозначить $k_i d_i = d_{i*}$, т.е. $\alpha_i d_i = (1+j)d_{i*}$, и учесть, что

$$(\underline{z}_{i+1} / \underline{z}_{ci}) = \sqrt{\gamma_i \mu_{i+1} / \gamma_{i+1} \mu_i},$$

то (50a) можно записать в виде

$$\underline{z}_i = \underline{z}_{ci} \frac{sh[(1+j)d_{i*}] + \sqrt{\frac{\gamma_i \mu_{i+1}}{\gamma_{i+1} \mu_i}} ch[(1+j)d_{i*}]}{\sqrt{\frac{\gamma_i \mu_{i+1}}{\gamma_{i+1} \mu_i}} sh[(1+j)d_{i*}] + ch[(1+j)d_{i*}]}, \quad (50b)$$

$$\text{где } \underline{z}_{ci} = \frac{(1+j)d_{i*}}{\gamma_i d_i}.$$

В случае $d_{i*} \rightarrow 0$, что справедливо, когда i -й слой очень тонок $d_i \rightarrow 0$, а глубина проникновения $\delta_i = \frac{1}{k_i}$ велика, то

$$\underline{z}_i \approx \underline{z}_{ci} \frac{0 + \left(\frac{\underline{z}_{i+1}}{\underline{z}_{ci}} \right) \cdot 1}{0 + 1} = \underline{z}_{i+1},$$

т.е. входное сопротивление становится равным сопротивлению $(i+1)$ слоя.

С учетом (50) выражения (46) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^{(i)}(z) &= \dot{E}_m^{(i)} \left(ch \underline{\Gamma}_i z - \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_i} sh \underline{\Gamma}_i z \right) = \dot{E}_m^{(i)} \frac{\underline{z}_{i+1} ch \underline{\Gamma}_i (d_i - z) + \underline{z}_{ci} sh \underline{\Gamma}_i (d_i - z)}{\underline{z}_{i+1} ch \underline{\Gamma}_i d_i + \underline{z}_{ci} sh \underline{\Gamma}_i d_i}, \\ \dot{H}_m^{(i)}(z) &= \dot{H}_m^{(i)} \left(ch \underline{\Gamma}_i z - \frac{\underline{z}_i}{\underline{z}_{ci}} sh \underline{\Gamma}_i z \right) = \dot{H}_m^{(i)} \frac{\underline{z}_{i+1} sh \underline{\Gamma}_i (d_i - z) + \underline{z}_{ci} ch \underline{\Gamma}_i (d_i - z)}{\underline{z}_{i+1} sh \underline{\Gamma}_i d_i + \underline{z}_{ci} ch \underline{\Gamma}_i d_i}. \end{aligned} \right\} (51)$$

Из (51) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{H_m^{(i)}(z)}{H_m^{(i)}} &= ch \underline{\Gamma}_i z - \frac{\underline{z}_i}{\underline{z}_{ci}} sh \underline{\Gamma}_i z = \frac{1}{2} \left[e^{\underline{\Gamma}_i z} \left(1 - \frac{\underline{z}_i}{\underline{z}_{ci}} \right) + e^{-\underline{\Gamma}_i z} \left(1 + \frac{\underline{z}_i}{\underline{z}_{ci}} \right) \right] = \\ &= \frac{e^{\underline{\Gamma}_i (d_i - z)} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_i (d_i - z)}}{e^{\underline{\Gamma}_i d_i} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_i d_i}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } M_{23} = \frac{\underline{z}_{i+1} - \underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1} + \underline{z}_{ci}}.$$

Легко видеть, что полученное выражение совпадает с (21,б).

$$\text{При } z = 0: \dot{E}_m^{(i)}(0) = \dot{E}_m^{(i)}, \dot{H}_m^{(i)}(0) = \dot{H}_m^{(i)}.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{При } z = d_i: \\ \dot{E}_m^{(i)}(d_i) &= \dot{E}_m^{(i)} \frac{\underline{z}_{i+1}}{\underline{z}_{i+1} ch \underline{\Gamma}_i d_i + \underline{z}_{ci} sh \underline{\Gamma}_i d_i}, \\ \dot{H}_m^{(i)}(d_i) &= \dot{H}_m^{(i)} \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1} sh \underline{\Gamma}_i d_i + \underline{z}_{ci} ch \underline{\Gamma}_i d_i}. \end{aligned} \right\} (51a)$$

Коэффициент ослабления H i -м слоем

$$\underline{k}_{oc} = \frac{\dot{H}_m^{(i)}(d_i)}{\dot{H}_m^{(i)}} = \frac{1}{\frac{\underline{z}_{i+1}}{\underline{z}_{ci}} sh \underline{\Gamma}_i d_i + ch \underline{\Gamma}_i d_i},$$

что совпадает с (38).

Если $\underline{z}_{i+1} \gg \underline{z}_{ci}$, например за слоем металла « i » следует диэлектрическая среда « $i+1$ » с большим «входным сопротивлением», то

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^{(i)}(z) &= \dot{H}_m^{(i)} \frac{sh \underline{\Gamma}_i (d_i - z)}{sh \underline{\Gamma}_i d_i}, \\ \dot{E}_m^{(i)}(z) &= \dot{E}_m^{(i)} \frac{ch \underline{\Gamma}_i (d_i - z)}{ch \underline{\Gamma}_i d_i}, \end{aligned} \right\} \quad (51б)$$

а значения напряженностей при $z = d$ (на «выходе» слоя)

$$\dot{H}_m^{(i)}(d_i) = 0, \dot{E}_m^{(i)}(d_i) = \dot{E}_m^{(i+1)} / ch \underline{\Gamma}_i d_i,$$

т.е. волна H полностью затухает внутри слоя.

Следует отметить, что (51) совпадает с (37) при $\underline{z}_{ci} \gg \underline{z}_{c2}$ и $\underline{z}_{ci} \gg \underline{z}_{c3}$, а (51б) – с (39).

Мощность, поступающая на входные зажимы i -го четырехполюсника, в соответствии с (15) при $z = 0$

$$\underline{S}_{(i)}^{(i)}(0) = \frac{1}{2} \dot{E}_m^{(i)} H_m^{(i)*} = \frac{|\dot{H}_m^{(i)}|^2}{2} \underline{z}_i. \quad (52)$$

Подставим в (52) выражение (50) для \underline{z}_i с учетом того, что согласно [9]

$$th \underline{\Gamma}_i d_i = \frac{\cos 2k_i d_i + j \sin 2k_i d_i - e^{-2k_i d_i}}{\cos 2k_i d_i + j \sin 2k_i d_i + e^{-2k_i d_i}}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \underline{S}_{(i)}^{(i)}(0) &= \frac{|\dot{H}_m^{(i)}|^2}{2} \frac{(1+j)k_i}{\gamma_i} \frac{1 + \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1}} th \underline{\Gamma}_i d_i}{th \underline{\Gamma}_i d_i + \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1}}} = \\ &= \frac{|\dot{H}_m^{(i)}|^2}{2} \frac{(1+j)k_i}{\gamma_i} \frac{1 + \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1}} th \underline{\Gamma}_i d_i}{th \underline{\Gamma}_i d_i + \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1}}} = \\ &= \frac{|\dot{H}_m^{(i)}|^2}{2} \frac{(1+j)k_i}{\gamma_i} \frac{a \cos 2k_i d_i + j a \sin 2k_i d_i + b e^{-2k_i d_i}}{a \cos 2k_i d_i + j a \sin 2k_i d_i - b e^{-2k_i d_i}} = \\ &= \frac{|\dot{H}_m^{(i)}|^2}{2} \frac{(1+j)k_i}{\gamma_i} \frac{e^{2k_i d_i} - j 2M_{23} \sin 2k_i d_i - M_{23}^2 e^{-2k_i d_i}}{e^{2k_i d_i} - 2M_{23} \cos 2k_i d_i + M_{23}^2 e^{-2k_i d_i}}, \end{aligned} \quad (53)$$

где $a = \left(1 + \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1}}\right)$, $b = \left(1 - \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1}}\right)$.

$$M_{23} = \frac{b}{a} = \frac{\underline{z}_{i+1} - \underline{z}_{ci}}{\underline{z}_{i+1} + \underline{z}_{ci}} - \text{коэффициент отражения типа (32) по терминологии вол-}$$

нового метода; приближенно считаем его вещественным [3, 4].

Мощность, снимаемая с выходных зажимов i -го четырехполюсника, в соответствии с (15) при $z = d_i$

$$S_{(I)}^{(i)}(d_i) = \frac{1}{2} \dot{E}_m^{(i)}(d_i) H_m^{*(i)}(d_i) = \frac{1}{2} \left| \dot{H}_m^{(i)}(d_i) \right|^2 \underline{z}_{i+1} = \frac{1}{2} \dot{H}_m^{(i)}(d_i) H_m^{*(i)}(d_i) \underline{z}_{i+1}, \quad (54)$$

где с учетом (51a)

$$\dot{H}_m^{(i)}(d_i) = \dot{H}_m^{(i)} \frac{\beta_i}{sh \Gamma_i d_i + \beta_i ch \Gamma_i d_i} = 2\beta_i \dot{H}_m^{(i)} \frac{1}{(1 + \beta_i) e^{k_i d_i} e^{j k_i d_i} - (1 - \beta_i) e^{-k_i d_i} e^{-j k_i d_i}} \quad (55)$$

$$\beta_i = \underline{z}_{ci} / \underline{z}_{i+1}, \quad \dot{H}_m^{(i)}(d_i) \underline{z}_{i+1} = \dot{H}_m^{(i)}(d_i).$$

Выражая β_i через M_{23} как $\beta_i = \frac{1 - M_{23}}{1 + M_{23}}$, $1 + \beta_i = \frac{2}{1 + M_{23}} = a$,

$1 - \beta_i = \frac{2M_{23}}{1 + M_{23}} = b$ и подставляя результат в (55), получаем

$$\dot{H}_m^{(i)}(d_i) = \dot{H}_m^{(i)} \frac{1 - M_{23}}{e^{\Gamma_i d_i} - M_{23} e^{-\Gamma_i d_i}}, \quad (55a)$$

что совпадает с (36).

Если считать M_{23} вещественным числом [3, 4], то из (55)

$$H_m^{*(i)}(d_i) = H_m^{*(i)} \frac{2\beta_i}{a e^{k_i d_i} e^{-j k_i d_i} - b e^{-k_i d_i} e^{j k_i d_i}}. \quad (56)$$

Подстановка (55) и (56) в (54) дает

$$S_I^{(i)}(d_i) = \underline{z}_{ci} \frac{\left| \dot{H}_m^{(i)} \right|^2}{2} \frac{(4\beta / \alpha^2)}{e^{2k_i d_i} - 2M_{23} \cos 2k_i d_i + M_{23}^2 e^{-2k_i d_i}},$$

где $\frac{4\beta}{a^2} = \frac{4(1-M_{23})(1+M_{23})^2}{(1+M_{23})^4} = 1 - M_{23}^2$, и окончательно

$$S_l^{(i)}(d_i) = \frac{|\dot{H}_m^{(i)}|^2}{2} \frac{(1+j)k_i}{\gamma_i} \frac{1 - M_{23}^2}{e^{2k_i d_i} - 2M_{23} \cos 2k_i d_i + M_{23}^2 e^{-2k_i d_i}}. \quad (57)$$

Если в (40а) и (40б) принять $M_{2l} = 1$, что характерно для случая заполнения слоя 1 диэлектриком, то эти выражения совпадут с (53) и (57) соответственно.

Следует отметить, что полученные приближенные выражения для мощностей (53) и (57) обычно не используются в расчетах методом E - H -четырёхполюсников, поскольку алгоритм вычислений предусматривает определение параметров всех четырёхполюсников, а также их входных сопротивлений, напряженностей и мощностей по точным формулам (49), (49а), (49б), (50), (48), (48а), (52), (54).

Если имеется многослойная система, то ее схема замещения на основе E - H -четырёхполюсников получается путем их каскадного включения соответственно слоям системы (рис. 10).

В этом случае входные величины $\dot{E}_m^{(l)}$, $\dot{H}_m^{(l)}$ связаны с величинами $\dot{E}_m^{(k)}$, $\dot{H}_m^{(k)}$ последнего слоя как

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(l)} \\ \dot{H}_m^{(l)} \end{bmatrix} = [T_l] \cdot [T_2] \dots [T_{k-l}] \begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(k)} \\ \dot{H}_m^{(k)} \end{bmatrix} = [T_\Sigma] \begin{bmatrix} \dot{E}_m^{(k)} \\ \dot{H}_m^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (58)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^{(l)} &= (A_\Sigma \underline{z}_{ck} + B_\Sigma) \dot{H}_m^{(k)}, \\ \dot{H}_m^{(l)} &= (C_\Sigma \underline{z}_{ck} + D_\Sigma) \dot{H}_m^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (58a)$$

Если $\dot{H}_m^{(l)}$ задана как линейная нагрузка индуктора, то

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^{(k)} &= \dot{H}_m^{(l)} / (C_\Sigma \underline{z}_{ck} + D_\Sigma), \\ \dot{E}_m^{(k)} &= \underline{z}_{ck} \dot{H}_m^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Далее определяются $\dot{E}_m^{(i)}$, $\dot{H}_m^{(i)}$ на входной поверхности каждого слоя, а также входные сопротивления слоев $\underline{z}_i = \dot{E}_m^{(i)} / \dot{H}_m^{(i)}$ и выделяющиеся в слоях мощности

$$\underline{S}_{(l)}^{(i)} = 0,5 \left(\dot{E}_m^{(i)} \dot{H}_m^{(i)*} - \dot{E}_m^{(i+1)} \dot{H}_m^{(i+1)*} \right). \quad (60)$$

5. ФОРМУЛЯР РАСЧЕТА МОЩНОСТЕЙ МЕТОДОМ Е-Н-ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

5.1. Задаются:

Частота питающего тока f , Гц;

линейная нагрузка индуктора A_H , А/м;

или его плотность тока j_H , А/м²;

толщина и длина обмоточного слоя d_H, l_H , м;

коэффициент заполнения медью обмоточного слоя k_3 ;

толщина i -го слоя d_i , м;

свойства среды слоя
(табл. 1)

$$\begin{cases} \mu_i, \text{ Гн/м,} \\ \gamma_i, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, \\ \varepsilon_i, \text{ Ф/м.} \end{cases}$$

длина слоя l_i , м;

средний диаметр слоя в случае цилиндрической конструкции D_{icp} , м.

ТАБЛИЦА 1

Материал слоя	$\gamma \cdot 10^{-6}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$	$\mu_* = (\mu / \mu_0)$
Титан	0,62	1
Нержавеющая сталь	1,1 ... 2	1
Электротехническая сталь	2 ... 4	3000
Сталь	7 ... 10	≥ 1200
	(1 при $t = 800^\circ \text{C}$)	(1 при $t = 800^\circ \text{C}$)
Никель	11,5	20
Алюминий	34 ... 38	1
Медь	42 ... 58	1
Диэлектрик (воздух)	$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$

5.2. Рассчитываются параметры
и постоянные четырехполюсников

Параметры

а) для металла

$$\underline{\Gamma}_i = d_i = (1+j)k_i,$$

где $k_i = \sqrt{\omega\mu_i\gamma_i/2} = 1/\delta_i$;

$d_{i*} = k_i d_i$ - относительная толщина слоя (в долях от глубины проникновения ЭМП δ_i).

$$\underline{z}_{ci} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_i}{2\gamma_i}} = \begin{cases} \frac{(1+j)d_{i*}}{\gamma_i d_i} = (1+j)R_{\exists(l)}d_{i*}, \\ \frac{j\omega\mu_i d_i}{(1+j)d_{i*}} = \frac{j\omega}{(1+j)R_{M(l)}d_{i*}}. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} th[0,5(1+j)d_{i*}] &= \frac{ch[(1+j)d_{i*}] - 1}{sh[(1+j)d_{i*}]} = \frac{\cos d_{i*} + j\sin d_{i*} - e^{-d_{i*}}}{\cos d_{i*} + j\sin d_{i*} - e^{-d_{i*}}}, \\ ch[(1+j)d_{i*}] &= chd_{i*} \cos d_{i*} + jshd_{i*} \sin d_{i*}, \\ sh[(1+j)d_{i*}] &= shd_{i*} \cos d_{i*} + jchd_{i*} \sin d_{i*}. \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

В случае $d_{i*} \rightarrow 0$, т.е. толщина слоя намного меньше глубины проникновения ЭМП [9],

$$\left. \begin{aligned} th[0,5(1+j)d_{i*}] &\approx 0,5(1+j)d_{i*}, \\ ch[(1+j)d_{i*}] &\approx 1, \\ sh[(1+j)d_{i*}] &\approx (1+j)d_{i*}. \end{aligned} \right\}$$

б) для диэлектрика

$$\underline{\Gamma}_i = jk_i, \text{ где } k_i = \omega\sqrt{\mu_i\epsilon_i} = \omega/v_i.$$

$$d_{i*} = k_i d_i = \omega d_i / v_i,$$

$$\underline{z}_{ci} = \sqrt{\mu_i/\epsilon_i} = \frac{d_{i*}}{\omega\epsilon_i d_i} = \frac{\omega\mu_i d_i}{d_{i*}},$$

$$\left. \begin{aligned} th(0,5jd_{i*}) &= \frac{d_{i*} - 1}{j \sin d_{i*}} = \frac{\cos d_{i*} + j \sin d_{i*} - 1}{\cos d_{i*} + j \sin d_{i*} + 1}, \\ chjd_{i*} &= \cos d_{i*}, \\ shjd_{i*} &= j \sin d_{i*}. \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

$$\text{В случае } d_{i*} \rightarrow 0: \quad \left. \begin{aligned} th(0,5jd_{i*}) &\approx 0,5jd_{i*}, \\ chjd_{i*} &\approx 1, \\ shjd_{i*} &\approx jd_{i*}. \end{aligned} \right\}$$

Постоянные четырехполюсников

а) для металла

$$A_i = D_i = ch[(1+j)d_{i*}],$$

$$B_i = \underline{z}_{ci} sh[(1+j)d_{i*}] = \frac{j\omega\mu_i d_i}{(1+j)d_{i*}} sh[(1+j)d_{i*}],$$

$$C_i = \frac{1}{\underline{z}_{ci}} sh[(1+j)d_{i*}] = \frac{\gamma_i d_i}{(1+j)d_{i*}} sh[(1+j)d_{i*}].$$

В случае $d_{i*} \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= 1, \\ B_i &= j\omega\mu_i d_i, \\ C_i &= \gamma_i d_i. \end{aligned} \right\}$$

б) для диэлектрика

$$A_i = D_i = \cos d_{i*},$$

$$B_i = j \underline{z}_{ci} \sin d_{i*} = \frac{j\omega\mu_i d_i}{d_{i*}} \sin d_{i*},$$

$$C_i = j \frac{1}{\underline{z}_{ci}} \sin d_{i*} = j \frac{\omega\varepsilon_i d_i}{d_{i*}} \sin d_{i*}.$$

В случае $d_{i*} \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= D_i = l, \\ B_i &= j\omega\mu_i d_i, \\ C_i &= j\omega\varepsilon_i d_i. \end{aligned} \right\}$$

Сопротивления Т-образных четырехполюсников (рис. 9,б)

а) для металла

$$\underline{z}_{Ai} = \underline{z}_{ci} \operatorname{th}[0,5(1+j)d_{i*}] = \frac{j\omega\mu_i d_i}{(1+j)d_{i*}} \operatorname{th}[0,5(1+j)d_{i*}],$$

$$\underline{z}_{Bi} = \frac{\underline{z}_{ci}}{\operatorname{sh}[(1+j)d_{i*}]} = \frac{(1+j)d_{i*}}{\gamma_i d_i \operatorname{sh}[(1+j)d_{i*}]}.$$

В случае $d_{i*} \rightarrow 0$:

$$\underline{z}_{Ai} \approx j0,5\omega\mu_i d_i = 0,5 \frac{j\omega}{R_{M(l)}} = 0,5j\omega L_{(l)},$$

$$\underline{z}_{Bi} \approx \frac{l}{\gamma_i d_i} = R_{\mathcal{E}(l)}.$$

Физический смысл сопротивлений поясняет рис. 11, где

$$R_{M(l)} = \frac{l}{\mu_i d_i \cdot l} - \text{магнитное сопротивление участка слоя в направлении } H \text{ еди-}$$

ничных глубины и длины, а

$$j\frac{\omega}{R_{M(l)}} = j\omega L_{(l)} = jX_{(l)} - \text{соответствующая ему реактивность};$$

$$R_{\mathcal{E}(l)} = \frac{l}{\gamma_i d_i \cdot l} - \text{электрическое сопротивление единичного участка слоя в на-}$$

правлении \vec{E} .

б) для диэлектрика

$$\underline{z}_{Ai} = \underline{z}_{ci} \operatorname{th}[0,5jd_{i*}] = \frac{\omega\mu_i d_i}{d_{i*}} \operatorname{th}(0,5jd_{i*}),$$

$$\underline{z}_{Bi} = \frac{\underline{z}_{ci}}{\operatorname{sh}[jd_{i*}]} = \frac{d_{i*}}{\omega\varepsilon_i d_i} \frac{l}{j \sin d_{i*}}.$$

В случае $d_{i*} \rightarrow 0$:

$$\underline{z}_{Ai} = j0,5\omega\mu_i d_i = 0,5 \frac{j\omega}{R_{M(l)}} = 0,5j\omega L_{(l)},$$

$$\underline{z}_{Bi} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_i d_i} = -j \frac{1}{\omega C_{(l)}},$$

где $C_{(l)} = \frac{\varepsilon d_i \cdot l}{l}$ - емкость единичного участка (рис. 11) в направлении \dot{E} .

Источник тока индуктора

Если заданы плотность тока в проводе, а также размеры обмоточного слоя и его коэффициент заполнения медью, то ток источника тока (линейная нагрузка индуктора) выражается как

$$\underline{j}_{mI} = \frac{j_{mn} k_3 d_I}{jd_{I*}} sh(jd_{I*}),$$

$$\text{где } d_{I*} = \omega \sqrt{\mu_I \varepsilon_I} d_I = k_I d_I.$$

Если обмоточный слой не содержит ферромагнитных зубцов (например, катушка индуктора расположена в воздухе), то $\mu_I = \mu_0$, $\varepsilon_I = \varepsilon_0$.

$$\text{В случае } d_{I*} \rightarrow 0: \boxed{\underline{J}_{mI} = j_{mI} d_I k_3} = A_{Im}.$$

5.3. Изображается схема замещения системы с каскадным включением четырехполюсников соответственно расположению слоев (рис. 10).

5.4. Выполняется расчет схемы замещения (при этом схема максимально упрощается) с определением $\dot{H}_m^{(i)}$ по (59) и (48а).

5.5. Рассчитываются мощности «слоев» на единицу поверхности по (60) и на полную поверхность

$$\underline{S}^{(i)} = \pi d_{icp} l_i \underline{S}_{(l)}^{(i)}.$$

6. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассматривается плоская волна в многослойной системе, изображенной на рис. 12.

Характеристики слоев:

3' и 5 - диэлектрическое полупространство ($\mu'_3 = \mu_5 = \mu_0, \varepsilon'_3 = \varepsilon_5 = \varepsilon_0$);

2' - шихтованный сердечник из электротехнической стали
($\gamma'_2 = 0, \mu'_2 = 3000\mu_0, d'_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$);

1' - диэлектрик ($d'_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \varepsilon'_1 = \varepsilon_0, \mu'_1 = \mu_0$);

0 - многовитковая обмотка индуктора, размещенная в диэлектрике
($d_0 = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}, j_n = 4 \cdot 10^{-6} \text{ А/м}^2, k_3 = 0,35, \varepsilon_0, \mu_0$);

1 - теплоизоляционный слой из диэлектрического материала ($\alpha^1 = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$);

2 - корпус из нержавеющей стали
($d_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \gamma_2 = 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, \mu = \mu_0$);

3 - диэлектрик ($d_3 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \gamma_3 = 0, \mu_3 = \mu_0$);

4 - стальной вторичный элемент устройства
($d_4 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \gamma_4 = 7 \cdot 10^6 \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}, \mu_4 = 240\mu_0$, сталь насыщена и нагрета в незначительной степени, при увеличении температуры γ_4 может быть скорректирована с помощью температурного коэффициента).

Расчет параметров четырехполюсников (по слоям)

слой 3'

$$k'_3 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 314 \sqrt{4 \cdot 10^{-7} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1},$$

$$\nu'_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$z'_{c3} = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 377 \text{ Ом} = Z_{в(1)}.$$

слой 2'

$$k'_2 = \sqrt{\omega \mu'_2 \gamma'_2 / 2} = 0,$$

$$d'_{2*} = d'_2 k'_2 = 0,$$

$$\underline{z}'_{AZ} = j 0,5 \omega \cdot \mu'_2 d'_2 = j 0,5 \cdot 314 \cdot 3000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \approx 0,$$

$$\underline{z}'_{BZ} = \frac{1}{\gamma'_2 d'_2} = \infty.$$

слой 1'

$$k'_1 = k'_3 = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1},$$

$$\nu'_1 = \nu'_3 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$d'_{1*} = 1,05 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 1,05 \cdot 10^{-8} \approx 0,$$

$$\underline{z}'_{AI} = j 0,5 \cdot 3,14 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \approx 0,$$

$$\underline{z}'_{BI} = \frac{1}{j 314 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = \infty.$$

слой 0

$$k_0 = k'_3 = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ 1/м},$$

$$\nu_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$d_{0*} = 1,05 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-2} \approx 0,$$

$$\underline{z}_{A0}^* \approx 0, \quad \underline{z}_{B0} = \infty.$$

Четырехполюсник активный, в нем имеется источник тока

$$\dot{J}_{mII} = \dot{A}_{II} = \dot{J}_{mII} d_0 k_3 = \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot 10^{-2} \cdot 0,635 = 1368 \cdot 10^4 \text{ А/м}.$$

слой 1

$$k_1 = k'_3 = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1},$$

$$\nu_1 = \nu'_3 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$d_{1*} = 1,05 \cdot 10^{-6} \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} \approx 0,$$

$$\underline{z}_{AI} \approx 0, \quad \underline{z}_{BI} = \infty.$$

слой 2

$$k_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \gamma_2}{2}} = \sqrt{\frac{314 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6}{2}} = 14 \text{ м}^{-1},$$

$$v_2 = \frac{\omega}{k_2} = \frac{314}{14} = 22,4 \text{ м/с} - \text{ скорость волны в корпусе,}$$

$$\delta_2 = \frac{l}{k_2} = 71,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \text{ глубина проникновения ЭМП в нержавеющую сталь,}$$

$$d_{2*} = k_2 d_2 = 14 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 7,0 \cdot 10^{-2},$$

$$\underline{z}_{c2} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2 \gamma_2}} = (1+j) \sqrt{\frac{314 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^6}} = (1+j) 14 \cdot 10^{-6} \text{ Ом,}$$

$$\underline{z}_{A2} = \underline{z}_{c2} \cdot \frac{ch[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] - 1}{sh[(1+j)7 \cdot 10^{-2}]} = (1+j) 14 \cdot 10^{-6} \frac{j 0,0049}{(1+j) 0,07} = j 0,98 \cdot 10^{-6} \text{ Ом,}$$

так как

$$\begin{cases} ch[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] = ch 0,07 \cdot \cos 0,07 + j sh 0,07 \cdot \sin 0,07 = 1 + j 0,0049 = A_2, \\ sh[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] = sh 0,07 \cdot \cos 0,07 + j ch 0,07 \cdot \sin 0,07 = (1+j) 0,07 = C_2 \underline{z}_{c2}, \end{cases}$$

или по приближенной формуле при $d_{2*} \rightarrow 0$

$$\underline{z}_{A2} = j 0,5 \omega \mu_2 d_2 = j 0,5 \cdot 314 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = j 0,98 \cdot 10^{-6} \text{ Ом,}$$

$$\underline{z}_{B2} = \frac{l}{C_2} = \frac{\underline{z}_{c2}}{sh[(1+j)7 \cdot 10^{-2}]} = \frac{(1+j) 14 \cdot 10^{-6}}{(1+j) 0,07} = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ Ом,}$$

или по приближенной формуле при $d_{2*} \rightarrow 0$

$$\underline{z}_{B2} = \frac{l}{\gamma_2 d_2} = \frac{l}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом,}$$

$$C_2 = \frac{l}{\underline{z}_{B2}} = 5 \cdot 10^3 \text{ Ом}^{-1}.$$

слой 3

$$k_3 = k'_3 = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1},$$

$$\begin{aligned}v_3 &= v'_3 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \\d_{3*} &= 1,05 \cdot 10^{-6} \cdot 2,8 \cdot 10^{-3} \approx 0, \\z_{A3} &= 0, \quad z_{B3} = \infty.\end{aligned}$$

слой 4

$$\begin{aligned}k_4 &= \sqrt{\frac{314 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 240 \cdot 7 \cdot 10^6}{2}} = 560 \text{ м}^{-1}, \\v_4 &= \frac{314}{560} = 0,56 \text{ м/с}, \\\delta_4 &= 0,0018 \text{ м}.\end{aligned}$$

Можно считать, что поле полностью затухает в ферромагнитном слое, так как $d_4 = 5 \text{ мм} > \delta_4 = 1,8 \text{ мм}$.

$$z_{c4} = (1+j) \sqrt{\frac{314 \cdot 240 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 7 \cdot 10^6}} = (1+j) 82,22 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}.$$

Синтез схемы замещения

Четырехполюсники включаются каскадно в соответствии с чередованием слоев устройства, (рис. 13,а).

С учетом рассчитанных выше параметров схему можно упростить и привести к виду рис. 13,б.

Расчет $\dot{H}_m^{(i)}$

На основании (50)

$$\begin{aligned}z_{2\text{вх}} &= \frac{\dot{E}_m^{(2)}}{\dot{H}_m^{(2)}} = z_{c2} \frac{z_{c4} + z_{c2} \text{th}[(1+j)d_{2*}]}{z_{c4} \text{th}[(1+j)d_{2*}] + z_{c2}} = \\&= z_{c2} \frac{\frac{z_{c4}}{z_{c2}} \text{ch}[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] + \text{sh}[(1+j)7 \cdot 10^{-2}]}{\frac{z_{c4}}{z_{c2}} \text{sh}[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] + \text{ch}[(1+j)7 \cdot 10^{-2}]} = \\&= (1+j) 14 \cdot 10^{-6} \frac{(1+j) 82 \cdot 10^{-6} + (1+j) 14 \cdot 10^{-6} \cdot (1+j) 7 \cdot 10^{-2}}{(1+j) 82 \cdot 10^{-6} \cdot (1+j) 7 \cdot 10^{-2} + (1+j) 14 \cdot 10^{-6}} = \\&= (70,28 + j 40) 10^{-6} \text{ Ом}.\end{aligned}$$

ИЗ (48А) ЗАПИСЫВАЕМ

$$\dot{H}_m^{(2)} = \frac{I}{\underline{z}_{c2}} sh[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] \dot{E}_m^{(3)} + ch[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] \dot{H}_m^{(3)}.$$

С учетом (50) $\dot{E}_m^{(3)} = \underline{z}_{c4} \dot{H}_m^{(3)}$, так как $\dot{E}_m^{(3)} = \dot{E}_m^{(4)}$ и $\dot{H}_m^{(3)} = \dot{H}_m^{(4)}$.

В результате напряженность магнитного поля на поверхности 4-го слоя

$$\begin{aligned} \dot{H}_m^{(3)} = \dot{H}_m^{(4)} &= \frac{\dot{H}_m^{(2)} = \dot{H}_m^{(1)}}{\frac{\underline{z}_{c4}}{\underline{z}_{c2}} sh[(1+j)7 \cdot 10^{-2}] + ch[(1+j)7 \cdot 10^{-2}]} = \\ &= \dot{H}_m^{(1)} \frac{I}{(1+j)82,22 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^3 + (1+j0,0049)} = \dot{H}_m^{(1)}(0,65 - j0,19), \end{aligned}$$

а ее модуль

$$|\dot{H}_m^{(3)}| = 0,677 |\dot{H}_m^{(1)}|,$$

причем $|\dot{H}_m^{(1)}| = A_H \sqrt{2} = 13,8 \cdot 10^4$ А/м.

Расчет мощностей

Удельная «погонная» мощность, передаваемая в слой 1 и далее, ВА/м²,

$$\begin{aligned} \underline{S}_{(1)}^{(1)} = \underline{S}_{(1)}^{(2)} &= |H_m^{(1)}|^2 \frac{I}{2} \underline{z}_{2вх} = \frac{13,8^2 \cdot 10^8}{2} \cdot 10^{-6} (70,28 + j40) = \\ &= 670900,005 + j382000. \end{aligned}$$

Удельная мощность, передаваемая в слой 4, ВА/м²,

$$\begin{aligned} \underline{S}_{(1)}^{(4)} &= \frac{|H_m^{(3)}|^2}{2} 82,22 \cdot 10^{-6} (1+j) = 0,46 \frac{13,8^2 \cdot 10^8}{2} (82,22 + j82,22) \cdot 10^{-6} = \\ &= 361100 + j361100. \end{aligned}$$

Полная мощность, передаваемая в слой 1 и далее, кВА,

$$\underline{S}^{(1)} = \underline{S}_{(1)}^{(1)} \pi D_{1cp} l_1 = (670900,5 + j382000) \pi \cdot 0,096 \cdot 0,07 = 14,16 + j8,02.$$

Полная мощность, передаваемая в слой 4, кВА,

$$\underline{S}^{(4)} = \underline{S}_{(I)}^{(4)} \pi D_{4cp} l_4 = (3611 + j3611) \pi \cdot 0,085 \cdot 0,07 = 6,86 + j6,86.$$

Коэффициент ослабления магнитного поля слоем 2 (корпусом устройства)

$$k_{oc} = \frac{|\dot{H}_m^{(3)}|}{|\dot{H}_m^{(I)}|} = 0,677.$$

Активная мощность (потери) в обмотке индуктора

$$P_{II} = \left(\frac{j^2}{\gamma_{сII}} \right) k_3 s_{II} \pi D_{срII} = \frac{4^2 \cdot 10^{12}}{50 \cdot 10^6} \cdot 0,35 \cdot \pi \cdot 0,19 \cdot 0,05 \cdot 0,07 = 234 \text{ Вт.}$$

Полная активная мощность устройства

$$P_{\Sigma} = P^{(I)} + P_{II} = 14,16 + 0,23 = 14,39 \text{ кВт.}$$

Примечание. В соответствии с (П 4.2) по методике [7, 11] и учетом ослабления поля путем домножения $(I_l w_{l0} = H^{(I)})$ на k_{oc}^2 получаем

$$\begin{aligned} P_{(I)}^{(4)} &= 2 \cdot 10^{-6} (k_{oc} I_l w_{l0})^2 \sqrt{\frac{\mu_{r4} f}{\gamma_4}} F_{nl} = \\ &= 2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,677^2 \cdot 9,8^2 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{240 \cdot 50}{7 \cdot 10^6}} \cdot l = 363,96 \text{ кВт/м}^2. \end{aligned}$$

Приложение 1

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА БЕГУЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛОСКОЙ СТРУКТУРЕ

П 1.1. Случай неподвижных слоев структуры

По-прежнему не учитывается ограниченность размеров устройства вдоль слоев по осям x и y , т.е. не принимаются во внимание продольный и поперечный краевые эффекты [8].

Плотность тока в слое индуктора задана в виде волны, бегущей по координате y , (рис. П1.1)

$$j_{II}(t, y) = J_{mII} \sin(\omega t - ay) = J_{mII} \sin \omega \left(t - \frac{y}{v_{yo}} \right), \quad (\text{П } 1.1)$$

где $a = \frac{\pi}{\tau}$, $\omega = 2\pi f$;

τ - длина полуволны (полусное деление индуктора);

$v_{yo} = \frac{\omega}{a} = 2\pi f$ - скорость движения волны по координате y .

В комплексной форме (П1.1) записывается как

$$\dot{J}_{II} = \dot{J}_{mII}(t, y) = \dot{J}_{mII} e^{j(\omega t - ay)}. \quad (\text{П } 1.2)$$

Все электромагнитные величины в любом i -м слое также являются бегущими по y волнами.

При этом плотность тока \dot{J}_i и напряженность электрического поля \dot{E}_i в каждом слое имеют только составляющие по оси x , а напряженность магнитного поля \dot{H}_i – составляющие по осям y и z [8], т.е.

$$\vec{H}_i = \vec{e}_y \dot{H}_{yi} + \vec{e}_z \dot{H}_{zi}, \quad \vec{E}_i = \vec{e}_x \dot{E}_{xi} = \vec{e}_x \dot{E}_i, \quad \vec{J} = \vec{e}_x \dot{J}_{xi} = \vec{e}_x \dot{J}_i, \quad (\text{П } 1.3)$$

где \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z – единичные векторы по осям x , y и z (рис. 1), а индексы m амплитудных значений опущены.

С учетом (П 1.2) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_i(t, y)}{\partial t} &= j\omega \dot{E}_i(t, y), \\ \frac{\partial \dot{E}_i(t, y)}{\partial y} &= -ja \dot{E}_i(t, y). \end{aligned} \quad (\text{П } 1.4)$$

Тогда подстановка (П 1.4) в оператор Лапласа в (1) дает уравнение (5), в котором

$$\underline{\Gamma}_i^2 = a^2 - \frac{\omega^2}{\nu_i^2} + j\alpha_i^2, \quad (\text{П } 1.5)$$

т.е. в сравнении с (4) добавляется слагаемое a^2 .

Легко видеть, что при $\tau \rightarrow \infty$ (бесконечно «длинная» волна) $a \rightarrow 0$ и (П 1.5) сводится к (4) для плоской волны.

Решение (5) для \dot{E}_i дает первое выражение в (6), т.е.

$$\dot{E}_i = A_i e^{\underline{\Gamma}_i z} + B_i e^{-\underline{\Gamma}_i z}. \quad (\text{П } 1.6)$$

С другой стороны, согласно [2],

$$\vec{H}_i = -\frac{1}{j\omega\mu_i} \text{rot} \vec{E}_i = \frac{1}{j\omega\mu_i} \left[-\vec{e}_y \left(\frac{\partial \dot{E}_i}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial \dot{E}_i}{\partial y} \right) \right], \quad (\text{П } 1.7)$$

или с учетом (П 1.6) и (П 1.4)

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{yi} = \dot{H}_i &= -\frac{\underline{\Gamma}_i}{j\omega\mu_i} \left(A_i e^{\underline{\Gamma}_i z} - B_i e^{-\underline{\Gamma}_i z} \right) \\ \dot{H}_{zi} &= -\frac{a}{\mu_i \omega} \dot{E}_i \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П } 1.8)$$

Из (П 1.6) и (П 1.8) следует, что \dot{H}_{zi} можно всегда вычислить через \dot{E}_i , т.е. достаточно записать систему (6) для \dot{E}_i и $\dot{H}_{yi} = \dot{H}_i$, в которой $\underline{\Gamma}_i$ подставить из (П 1.5).

Выражения (49), (49а), (52), (54) для параметров и мощностей Е-Н-четырёхполюсников в данном случае внешне не изменяются. Вместе с тем подстановка в них $\underline{\Gamma}_i$ из (П 1.5) ведет к принципиально иным количественным и качественным результатам по сравнению со случаем плоской волны.

Действительно, для плоской волны в диэлектрике

$$\underline{\Gamma}_i d_i = j \frac{\omega}{\nu_i} d_i = j \frac{\omega d_i}{3 \cdot 10^8} \approx 0_{(\text{для воздуха})},$$

и из (38), (38а) получаем $k_{oci} = 1$, т.е. волна в слое диэлектрика толщиной d_i не затухает, что лишь еще раз подтверждает вывод разд. 3.

Для случая же бегущей волны в диэлектрике

$$\Gamma_i d_i = \sqrt{a^2 - \frac{\omega^2}{v_i^2}} d_i \approx \frac{\pi}{\tau} d_i,$$

и имеем

$$k_{oci} = \frac{1}{\frac{z_{i+1}}{z_{ci}} sh \frac{\pi d_i}{\tau} + ch \frac{\pi d_i}{\tau}} < 1. \quad (\text{П 1.9})$$

Например, если слой « $i+1$ » заполнен металлом, а слой « i » толщиной $d_i = \frac{\tau}{\pi}$ - диэлектриком (в частности, медью и воздухом соответственно), то для плоской волны

$$\frac{|z_{i+1}|}{|z_{ci}|} = \frac{2,7 \cdot 10^{-6}}{377} = 0,$$

а для бегущей волны

$$\frac{z_{i+1}}{z_{ci}} = \frac{j\omega\mu_{i+1}}{\sqrt{a^2 + j\alpha_{i+1}^2}} \frac{\sqrt{a^2 - \omega^2\epsilon_i\mu_i}}{j\omega\mu_i} = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \sqrt{\frac{1 - v_{yo}^2\epsilon_i\mu_i}{1 + v_{yo}^2\gamma_{i+1}\mu_{i+1}}} \approx 0 \quad (\text{П 1.10})$$

(например, $v_{yo} = 2\pi f = 2 \cdot 0,05 \cdot 50 = 5$ м/с, $\gamma_{i+1} = 5 \cdot 10^7$ Ом⁻¹м⁻¹, $\mu_{i+1} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м).

Поскольку $ad_i = \frac{\pi}{\tau} \frac{\tau}{\pi} = 1$ и выполняется (П 1.10), то из (П 1.9) получаем

$$k_{oci} = \frac{1}{ch 1} = 0,66.$$

Таким образом, слой воздуха толщиной в одну треть полюсного деления индуктора ослабляет напряженность магнитного поля на 34%.

П 1.2. Случай движущихся слоев

Если i -й слой движется в направлении оси y со скоростью v_{yi} , то уравнения Максвелла записываются в виде [2]

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{H}_i &= \vec{J}_i, \\ \vec{J}_i &= \gamma_i \vec{E}_i + j\omega\epsilon_i \vec{E}_i + \epsilon_i \text{rot}(\vec{E}_i \times \vec{V}_i), \\ \text{rot} \vec{E}_i &= -j\omega\mu_i \vec{H}_i - \mu_i \text{rot}(\vec{H}_i \times \vec{V}_i). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.11})$$

Если учесть условие (П 1.3) для векторов \vec{E} , \vec{H} и \vec{J} , то (П 1.11) превращаются в следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} & \text{– из 1 – го и 2 – го} \quad \text{rot} \vec{H}_i = \frac{\partial \dot{H}_{zi}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{yi}}{\partial z} = \gamma_i \dot{E}_{xi} + j\omega \varepsilon_i \dot{E}_{xi} + j\varepsilon_i \nu_{yi} a \dot{E}_{xi}, \\ & \text{– из 3 – го} \quad \frac{\partial \dot{E}_{xi}}{\partial z} = (-j\omega \mu_i + ja \nu_{yi} \mu_i) \dot{H}_{yi} = -j\omega s_i \mu_i \dot{H}_{yi}, \\ & \quad \dot{H}_{zi} = -\frac{a}{\mu_i \omega - a \nu_{yi} \mu_i} \dot{E}_{xi} = \frac{a}{\mu_i \omega s_i} \dot{E}_{xi}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.12})$$

После подстановок последних выражений (П 1.12) в первое с учетом (П 1.4) имеем

$$\frac{d^2 \dot{E}_{xi}}{dz^2} = (a^2 + j\omega s_i \mu_i \gamma_i - \omega^2 s_i^2 \varepsilon_i \mu_i) \dot{E}_{xi},$$

или

$$\frac{d^2 \dot{E}_i}{dz^2} = \underline{\Gamma}_i^2 \dot{E}_i, \quad (\text{П 1.13})$$

где $\underline{\Gamma}_i^2 = a^2 - \frac{\omega^2 s_i^2}{\nu_i^2} + j\mu_i \gamma_i \omega s_i$, (П 1.14)

$$s_i = 1 - \frac{a}{\omega} \nu_{yi} = 1 - \frac{\nu_{yi}}{\nu_{yo}} \text{ – скольжение } i\text{-го слоя,}$$

$$\nu_{yo} = \frac{2\pi f \tau}{\pi} = 2\tau f \text{ – скорость поля, индекс «х» опущен.}$$

Нетрудно видеть, что при неподвижном слое $\nu_{yi} = 0$, $s_i = 1$ и (П 1.14) превращается в (П 1.5).

Мощность, выделяющаяся в i -м слое, определяется из вектора Пойнтинга (52), (54)

$$\underline{S}_i = 0,5 \left(\dot{E}_i^* H_i - \dot{E}_{i+1}^* H_{i+1} \right). \quad (\text{П 1.15})$$

Мощность необратимых преобразований энергии в i -м слое на единицу поверхности [8], Вт/м²

$$P_i = \text{Re} \underline{S}_i, \quad (\text{П 1.16})$$

в том числе мощность электрических потерь, Вт/м²,

$$P_{\text{э}i} = P_i s_i. \quad (\text{П 1.17})$$

При этом часть активной мощности слоя превращается в механическую мощность перемещения слоя со скольжением s_i , Вт/м²,

$$P_{Mxi} = P_i(1 - s_i). \quad (\text{П } 1.18)$$

Электромагнитная сила, действующая в направлении оси y и приходящаяся на единицу поверхности [8], Н/м²

$$F_i = \frac{P_i(1 - s_i)}{v_{yi}} = \frac{P_i}{v_{yo}} = \frac{P_i}{2\tau} = \frac{a}{\omega} P_i. \quad (\text{П } 1.19)$$

Таким образом, рассматриваемое устройство является одновременно электротермическим и электромеханическим преобразователем энергии (линейным двигателем).

П 1.3. Аналитические выражения для основных величин [15]

На основе (П 1.6), (П 1.8) выражения для напряженностей поля в слое i в неподвижной системе координат записываются как

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xi} &= A_i e^{\Gamma_i z} + B_i e^{-\Gamma_i z}, \\ \dot{H}_{yi} &= -\frac{1}{z_{ci}} (A_i e^{\Gamma_i z} - B_i e^{-\Gamma_i z}), \\ \dot{H}_{zi} &= -\frac{a}{\omega \mu_i} \dot{E}_{xi}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 1.20)$$

Неизвестные постоянные интегрирования A_i, B_i определяются из решения алгебраической системы уравнений, полученных с помощью 2-го и 3-го уравнений (П 1.20) на основании граничных условий для всех границ между слоями.

Граничные условия выражают неизменность нормальных индукций при переходе через границу и скачок тангенциальных напряженностей магнитного поля на величину сторонней линейной токовой нагрузки между слоями, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{zi} &= \mu_i \dot{H}_{zi} = \dot{B}_{zi+l} = \mu_{i+l} \dot{H}_{z,i+l}, \\ \dot{H}_{yi} - \dot{H}_{y,i+l} &= j_{mi}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 1.21)$$

и после подстановки координаты границы z_i в (П 1.20)

$$\left. \begin{aligned} A_i e^{\Gamma_i z_i} + B_i e^{-\Gamma_i z_i} - A_{i+l} e^{\Gamma_{i+l} z_i} - B_{i+l} e^{-\Gamma_{i+l} z_i} &= 0, \\ -\frac{1}{z_{ci}} (A_i e^{\Gamma_i z_i} - B_i e^{-\Gamma_i z_i}) + \frac{1}{z_{ci+l}} (A_{i+l} e^{\Gamma_{i+l} z_i} - B_{i+l} e^{-\Gamma_{i+l} z_i}) &= j_{mi}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 1.22)$$

Аналитическое решение системы (П 1.22) целесообразно получить при количестве слоев не более трех. Соответствующие выражения приведены в [15].

Рассматривается трехслойная система с бесконечно тонким слоем стороннего тока на поверхности индуктора:

подобласть 1, $z < 0$ - магнитопровод с $\gamma = 0$, $\mu = \mu'$, при $z = 0$ выполняются граничные условия (П 1.21), т.е. $B_z(0)$ непрерывно и $\dot{H}_y(+0) - \dot{H}_y(-0) = \dot{J}_{mI}$, где $\dot{J}_{mI} = A_I$ - токовая линейная нагрузка индуктора, а также $H = 0$ при $z \rightarrow -\infty$;

подобласть 2, $0 \leq z \leq d$ - проводящий слой с $\gamma = \gamma$, $\mu = \mu$, при $z = \alpha$ индукция $B_z(\alpha)$ и напряженность $\dot{H}_y(\alpha)$ непрерывны;

подобласть 3, $z > d$ - среда над слоем с $\gamma = \gamma''$, $\mu = \mu''$, при $z \rightarrow \infty$ напряженность $H = 0$.

П 1.3.1. Выражения для индукций и напряженностей [15]

Если магнитная проницаемость магнитопровода индуктора $\mu' = \infty$, а среда над слоем немагнитная и непроводящая ($\gamma'' = 0$, $\mu'' = \mu_0$), то

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_z &= -\frac{j a \mu A_I}{\Gamma} \frac{a \mu \operatorname{sh} \Gamma(d-z) + \Gamma \mu_0 \operatorname{ch} \Gamma(d-z)}{a \mu \operatorname{ch} \Gamma d + \Gamma \mu_0 \operatorname{sh} \Gamma d}, \\ \dot{B}_y &= \mu \dot{A}_I \frac{a \mu \operatorname{ch} \Gamma(d-z) + \Gamma \mu_0 \operatorname{sh} \Gamma(d-z)}{a \mu \operatorname{ch} \Gamma d + \Gamma \mu_0 \operatorname{sh} \Gamma d}, \\ \dot{E}_x &= -\frac{\omega}{a} B_z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.23})$$

Если бесконечную магнитную проницаемость имеет не только магнитопровод ($\mu' = \infty$), но и среда над слоем ($\mu'' = \infty$), то

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_z &= -\frac{j a \mu A_I}{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} \Gamma(d-z)}{\operatorname{sh} \Gamma d}, \\ \dot{B}_y &= \mu \dot{A}_I \frac{\operatorname{sh} \Gamma(d-z)}{\operatorname{sh} \Gamma d}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.24})$$

Если проводящий слой представляет собой полупространство ($d \rightarrow \infty$), то из (П 1.23) после некоторых преобразований получаем

$$\dot{B}_z = -\frac{j a \mu \dot{A}_I}{\Gamma} e^{-\Gamma z}, \quad \dot{B}_y = \mu \dot{A}_I e^{-\Gamma z}. \quad (\text{П 1.25})$$

В случае холостого хода (проводящего слоя нет, т.е. $\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$) имеем

$$\dot{B}_z = -j\mu_0 \dot{A}_H e^{-az}, \quad \dot{B}_y = \mu_0 \dot{A}_H e^{-az}. \quad (\text{П 1.26})$$

Поле холостого хода индуктора без магнитопровода ($\gamma' = 0$, $\mu' = \mu_0$) в два раза слабее поля при наличии сердечника, так как при этом образуются одинаковые поля в рабочем (но пустом) пространстве $z > 0$ и в полупространстве $z < 0$:

$$\dot{B}_z = -\frac{j\mu_0 \dot{A}_H}{2} e^{-az}, \quad \dot{B}_y = \frac{\mu_0 \dot{A}_H}{2} e^{-az}. \quad (\text{П 1.27})$$

П 1.3.2. Особенности магнитного поля в проводящем слое при двустороннем индукторе [15]

В этом случае среда над слоем является также индуктором, на поверхности которого размещен токовый слой с линейной нагрузкой $\dot{A}_H e^{j\varphi}$, где φ - угол сдвига фаз токов верхнего индуктора по сравнению с токами нижнего. Начало координат поместим в середине расстояния между индукторами.

Тогда расчетная модель имеет следующие подобласти:

подобласть 1, $z < -\frac{\delta}{2}$ - нижний индуктор с $\gamma = 0$, $\mu = \mu'$; граничные условия - $B\left(-\frac{\delta}{2}\right)$ непрерывно, $\dot{H}_y\left(-\frac{\delta}{2}+0\right) - \dot{H}_y\left(-\frac{\delta}{2}-0\right) = \dot{A}_H e^{j\varphi}$;

подобласть 2, $-\frac{\delta}{2} \leq z \leq \frac{\delta}{2}$ - рабочее пространство с $\gamma = \gamma$, $\mu = \mu$;

подобласть 3, $z > \frac{\delta}{2}$ - верхний индуктор с $\gamma = 0$, $\mu = \mu'$; граничные условия - $B\left(\frac{\delta}{2}\right)$ непрерывно, $\dot{H}_y\left(\frac{\delta}{2}-0\right) - \dot{H}_y\left(\frac{\delta}{2}+0\right) = \dot{A}_H$.

Кроме того $H = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Если магнитная проницаемость обоих магнитопроводов $\mu' = \infty$, то

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_z &= \frac{j\mu \dot{A}_H}{\Gamma sh \Gamma \delta} \left[ch \Gamma \left(\frac{\delta}{2} + z \right) + e^{j\varphi} ch \Gamma \left(\frac{\delta}{2} - z \right) \right], \\ \dot{B}_y &= \frac{\mu \dot{A}_H}{sh \Gamma \delta} \left[sh \Gamma \left(\frac{\delta}{2} + z \right) + e^{j\varphi} sh \Gamma \left(\frac{\delta}{2} - z \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.28})$$

При согласном включении индукторов ($\varphi = 0$)

$$\dot{B}_z = \frac{j a \mu \dot{A}_H}{\Gamma} \frac{ch \Gamma z}{sh\left(\Gamma \frac{\delta}{2}\right)}, \quad \dot{B}_y = \mu \dot{A}_H \frac{sh \Gamma z}{sh\left(\Gamma \frac{\delta}{2}\right)}. \quad (\text{П } 1.29)$$

Если принять, что толщина слоя δ вдвое больше толщины d слоя при одностороннем индукторе и $\mu'' = \infty$ (П 1.3.1), и учесть, что в данном случае двустороннего индуктора начало координат по z смещено в середину зазора, то нетрудно обнаружить, что (П 1.24) и (П 1.29) совпадают. Это вполне закономерно, поскольку в случае двустороннего индуктора плоскость симметрии проходит по средней линии слоя, а в случае одностороннего индуктора ферромагнитная среда за слоем является магнитным шунтом (как идеальный второй сердечник с $\mu' = \infty$ и без обмотки).

При встречном включении ($\varphi = \pi$)

$$\dot{B}_z = \frac{j a \mu \dot{A}_H}{\Gamma} \frac{sh \Gamma z}{ch\left(\Gamma \frac{\delta}{2}\right)} = -\frac{a}{s\omega} \dot{E}_x, \quad \dot{B}_y \mu \dot{A}_H = \frac{ch \Gamma z}{ch\left(\Gamma \frac{\delta}{2}\right)}. \quad (\text{П } 1.30)$$

При холостом ходе (пустом зазоре δ с $\gamma = 0$) и ферромагнитных сердечниках с $\mu' = \infty$:

- для согласного включения индукторов

$$\dot{B}_z = j \mu_0 A_H \frac{ch az}{sh\left(a \frac{\delta}{2}\right)}, \quad \dot{B}_y = \mu_0 A_H \frac{sh az}{sh\left(a \frac{\delta}{2}\right)}; \quad (\text{П } 1.31)$$

- для встречного включения

$$\dot{B}_z = j \mu_0 A_H \frac{sh az}{ch\left(a \frac{\delta}{2}\right)}, \quad \dot{B}_y = \mu_0 A_H \frac{ch az}{ch\left(a \frac{\delta}{2}\right)}. \quad (\text{П } 1.32)$$

При холостом ходе и согласном включении индукторов, не имеющих магнитопроводов ($\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$, $\mu' = \mu_0$),

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_z &= j \mu_0 A_H e^{-\frac{a\delta}{2}} ch az, \\ \dot{B}_y &= \mu_0 A_H e^{-\frac{a\delta}{2}} sh az. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 1.33)$$

П 1.3.3. Выражения для мощностей и усилий в металлическом полупространстве

Компоненты индукции определяются в соответствии с (П 1.25) при замене в них для общего случая линейной нагрузки A_H тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности полупространства \dot{H}_0 с учетом (П 1.2)

$$\dot{H}_{0t} = \dot{H}_0 e^{j(\omega t - ay)} = H_0 e^{j\psi_H} e^{j(\omega t - ay)}, \quad (\text{П 1.34})$$

т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{zt} &= -\frac{ja\mu\dot{H}_0}{\underline{\Gamma}} e^{j\psi_H} e^{j(\omega t - ay)} e^{-\underline{\Gamma}z}, \\ \dot{B}_{yt} &= \mu\dot{H}_0 e^{j\psi_H} e^{j(\omega t - ay)} e^{-\underline{\Gamma}z}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.34a})$$

а напряженность и плотность тока выражаются в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_t &= \dot{E} e^{j(\omega t - ay)} = -\frac{\omega}{a} \dot{B}_{zt} = \frac{j\omega\mu}{\underline{\Gamma}} H_0 e^{j\psi_H} e^{-\underline{\Gamma}z} e^{j(\omega t - ay)}, \\ \dot{J}_t &= \gamma(\dot{E}_t + \nu\dot{B}_{zt}) = \gamma\dot{E}_t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.34б})$$

Распределение плотности активной мощности (потерь в единице объема) в соответствии с (40)

$$W(z) = \Delta p(z) = \frac{I}{2\gamma} |j|^2 = \frac{H_0^2}{2} \omega^2 s^2 \mu^2 \gamma \frac{I}{|\underline{\Gamma}|^2} e^{-\left(\frac{\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^*}{2}\right)z}, \quad (\text{П 1.35})$$

где $\underline{\Gamma} = a(N + jM)$, $N = \sqrt{\frac{I}{2}(\sqrt{I + \varepsilon^2} + I)}$, $M = \sqrt{\frac{I}{2}(\sqrt{I + \varepsilon^2} - I)}$,

$\varepsilon_0 = \frac{\mu\gamma\omega}{a^2}$ - электромагнитная добротность устройства,

$\varepsilon = \varepsilon_0 S$,

$|\underline{\Gamma}|^2 = a^2 \sqrt{I + \varepsilon^2}$, $\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^* = 2aN$, $\underline{\Gamma}\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}^2 = a^2(1 + j\varepsilon) = a^2 \sqrt{I + \varepsilon^2} e^{j\arctg \varepsilon}$,

$\frac{I}{\underline{\Gamma}} = \frac{N - jM}{a\sqrt{I + \varepsilon^2}}$.

Мощность, поступающую в металл через единицу площади на расстоянии z от поверхности (удельная входная мощность), выражается с помощью вектора Пойнтинга как

$$\underline{S}_{(I)}(z) = \frac{I}{2} \left(\dot{E}_t H_{yt}^* \right) = \frac{I}{2} \left(\dot{E} H_y^* \right) = \frac{I j \omega \mu H_0^2}{2 \underline{\Gamma}} e^{-\left(\frac{\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^*}{2} \right) z} = \frac{H_0^2}{2} \frac{a}{\gamma s} \frac{\varepsilon (M + jN)}{\sqrt{I + \varepsilon^2}} e^{-2aNz}, \quad (\text{П 1.36})$$

причем активная мощность

$$P_{(I)}(z) = \frac{\omega \mu H_0^2}{2} J_m \left(\frac{I}{\underline{\Gamma}} e^{-\left(\frac{\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^*}{2} \right) z} \right) = \frac{H_0^2}{2} \frac{aM}{\gamma s} \frac{\varepsilon}{\sqrt{I + \varepsilon^2}} e^{-2aNz}. \quad (\text{П 1.36a})$$

Мгновенное значение нормального удельного усилия (плотности усилия по координате z) в соответствии с (15a) записывается в виде

$$f_z(z, t) = \frac{I}{2} \text{Re} \left(\dot{B}_{yt} J_t^* \right) + \frac{I}{2} \text{Re} \left(\dot{B}_{yt} J_t \right). \quad (\text{П 1.37})$$

Первое слагаемое (П 1.37), равное среднему за период значению усилия, преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{I}{2} \text{Re} \left(\dot{B}_y J^* \right) = \frac{\omega s \mu^2 \gamma}{2} H_0^2 \text{Re} \left[-\frac{j}{\underline{\Gamma}^*} e^{-\left(\frac{\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^*}{2} \right) z} \right] = \\ &= \frac{H_0^2}{2} \mu a M \frac{\varepsilon}{\sqrt{I + \varepsilon^2}} e^{-2aNz} = s \mu \gamma P_{(I)}(z). \end{aligned} \quad (\text{П 1.37a})$$

и отличается от (15б) наличием множителя s (что понятно, поскольку частота токов в металле ωs в s раз отличается от частоты тока индуктора ω) и видом зависимости от z .

Второе слагаемое (П 1.37) характеризует пульсирующую составляющую нормального удельного усилия

$$\begin{aligned} f_z(t) &= \frac{I}{2} \text{Re} \left(\dot{B}_{yt} J_t \right) = \\ &= \frac{I}{2} \text{Re} \left[\mu H_0 e^{j\psi_H} e^{-\underline{\Gamma}z} e^{j(\omega t - ay)} j \omega s \mu \gamma \frac{I}{\underline{\Gamma}} H_0 e^{j\psi_H} e^{-\underline{\Gamma}z} e^{j(\omega t - ay)} \right] = \\ &= \frac{H_0^2}{2} \mu a M \frac{\varepsilon}{\sqrt{I + \varepsilon^2}} e^{-2aNz} \cos(2\omega t - 2ay + 2\psi_H - 2aMz). \end{aligned} \quad (\text{П 1.37б})$$

Мгновенное значение тангенциального (тягового, направленного по оси y) усилия

$$f_y(z, t) = \frac{I}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{B}_{zt} J_t^* \right) + \frac{I}{2} \operatorname{Re} (\dot{B}_{zt} \dot{J}_t). \quad (\text{П } 1.38)$$

После подстановки \dot{B}_{zt} и \dot{J}_t для среднего за период тягового усилия (первое слагаемое) получаем

$$f_y = \frac{I}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{B}_z J^* \right) = -\frac{H_0^2}{2} a \omega s \mu^2 \gamma \frac{1}{|\underline{\Gamma}|^2} e^{-\left(\frac{\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^*}{2}\right)z} = -\frac{H_0^2}{2} a \mu \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} e^{-2aNz}. \quad (\text{П } 1.38a)$$

Из сравнения (П 1.35) и (П 1.38a) видно, что

$$f_y = \frac{W(z)a}{\omega s} = \frac{\Delta p(z)}{s} \frac{I}{v_0}, \quad (\text{П } 1.38б)$$

где $v_0 = 2\tau f$ - скорость движения магнитного поля относительно неподвижного индуктора.

Структура выражения (П 1.38б) для f_y вполне согласуется с теорией асинхронного двигателя: произведение тягового усилия на синхронную скорость дает электромагнитную мощность, а умножение последней на скольжение приводит к выражению для потерь во вторичном элементе двигателя.

Второе слагаемое (П 1.38) характеризует пульсирующую с двойной частотой во времени составляющую тягового усилия

$$\begin{aligned} f_y(t) &= \frac{I}{2} \operatorname{Re} (\dot{B}_{zt} \dot{J}_t) = \frac{H_0^2}{2} a \omega s \mu^2 \gamma \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2\underline{\Gamma}z}}{\underline{\Gamma}^2} e^{j(2\omega t - 2ay + 2\psi_H)} \right] = \\ &= \frac{H_0^2}{2} a \mu \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} e^{-2aNz} \cos(2\omega t + 2\psi_H - 2ay - \arctg \varepsilon - 2aMz). \end{aligned} \quad (\text{П } 1.38в)$$

Интегральное среднее за период тяговое усилие, действующее на перпендикулярный поверхности полупространства призматический столбик с поперечным сечением $b \times l$ (размеры по осям x и y , рис. 2б) и бесконечной длиной по оси z , определяется как

$$F_y = \int_0^{\infty} \int_0^b \int_0^l f_y dz dx dy = bl \int_0^{\infty} f_y dz = F_B \bar{F}_y, \quad (\text{П } 1.39)$$

где $F_B = H_0^2 lb \mu$ - базисное усилие,

$$\bar{F}_y = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{2}(\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} - 1}{2(1 + \varepsilon^2)}} \quad - \text{относительное значение тягового усилия. (П } 1.39a)$$

Относительное значение интегрального среднего за период нормального усилия вычисляется аналогично с помощью выражения

$$\overline{F}_z = \frac{I}{4} \left(I - \frac{I}{\sqrt{I + \varepsilon^2}} \right). \quad (\text{П 1.396})$$

Далее приводим выражения лишь для средних за период значений усилий.

Из (П 1.36) можно выразить коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{P_{(I)}}{S_{(I)}} = \frac{M}{N^2 + M^2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{I + \varepsilon^2} - I)}}{\sqrt{2} \sqrt{I + \varepsilon^2}}. \quad (\text{П 1.40})$$

П 1.3.4. Выражения для усилий, действующих на слой толщиной d , [15]

Компоненты среднего за период удельного усилия по осям y и z вычисляются как [2, 15].

$$\left. \begin{aligned} f_y &= \frac{a\gamma\omega s\mu^2 H_0^2}{2|\underline{\Gamma}|^2} \frac{|a\mu sh\underline{\Gamma}(d-z) + \underline{\Gamma}\mu_0 ch\underline{\Gamma}(d-z)|^2}{|a\mu ch\underline{\Gamma}d + \underline{\Gamma}\mu_0 sh\underline{\Gamma}d|^2} \\ f_z &= \frac{\gamma\mu^2 H_0^2}{2|\underline{\Gamma}|^2} Jm \left\{ \underline{\Gamma} [a\mu sh\underline{\Gamma}(d-z) + \underline{\Gamma}\mu_0 ch\underline{\Gamma}(d-z)] \cdot [a\mu ch\underline{\Gamma}(d-z) + \underline{\Gamma}\mu_0 sh\underline{\Gamma}(d-z)]^* \right\} / |a\mu ch\underline{\Gamma}d + \underline{\Gamma}\mu_0 sh\underline{\Gamma}d|^2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П 1.41})$$

В [15] выражения для интегральных относительных усилий приводятся в функции относительных величин:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_i &= \underline{\Gamma}d = \sqrt{\overline{a}^2 + j\overline{\omega}} = \overline{\alpha}\sqrt{I + j\varepsilon}, \\ \overline{\alpha} &= ad = \frac{\pi d}{\tau}, \quad \overline{\omega} = \mu\gamma\omega s d^2, \quad \varepsilon = \mu\gamma\omega s \frac{I}{a^2}, \quad \mu = \mu_0 \overline{\mu} \end{aligned}$$

и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_y &= \frac{1}{\mu H_0^2} \int_0^d f_y dz = \bar{a} Jm \frac{\left\{ \bar{\omega}_i [\bar{\omega}_i sh \bar{\omega}_i + \bar{a} \bar{\mu} ch \bar{\omega}_i] [\bar{\omega}_i ch \bar{\omega}_i + \bar{a} \bar{\mu} sh \bar{\omega}_i]^* \right\}}{2 \left| \bar{\omega}_i [\bar{\omega}_i sh \bar{\omega}_i + \bar{a} \bar{\mu} ch \bar{\omega}_i] \right|^2} \\ \bar{F}_z &= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{\bar{a}^2 |\bar{\omega}_i ch \bar{\omega}_i + \bar{a} \bar{\mu} sh \bar{\omega}_i|^2 + \bar{a}^2 \left| (\bar{\mu}^2 - 1) \bar{\omega}_i \right|^2}{\left| \bar{\omega}_i [\bar{\omega}_i sh \bar{\omega}_i + \bar{a} \bar{\mu} ch \bar{\omega}_i] \right|^2} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi) \quad 1.41a)$$

Базисное значение усилия

$$F_{\delta az} = \frac{H_0^2 \mu V}{d},$$

где V - объем слоя.

П 1.3.5. Усилия для слоя в двустороннем индукторе

Принимается, что на поверхностях слоя действует тангенциальная компонента напряженности поля \dot{H}_0 и $-\dot{H}_0 e^{j\varphi}$, в общем случае не равная линейной плотности тока нижнего \dot{A}_H или верхнего $-\dot{A}_H e^{j\varphi}$ индукторов.

Выражения для составляющих плотности усилия в слое определяются с учетом (П 1.28) и (П 1.34), если δ заменить d ,

$$\left. \begin{aligned} f_y &= \frac{a \gamma \omega s \mu^2 H_0^2}{2 |\Gamma sh \Gamma d|^2} \left| ch \Gamma \left(\frac{d}{2} + z \right) + e^{j\varphi} ch \Gamma \left(\frac{d}{2} - z \right) \right|^2 \\ f_z &= \frac{\gamma \omega s \mu^2 H_0^2}{2 |sh \Gamma d|^2} Jm \frac{1}{\Gamma} \left[ch \Gamma \left(\frac{d}{2} + z \right) + e^{j\varphi} ch \Gamma \left(\frac{d}{2} - z \right) \right] \times \\ &\times \left[sh \Gamma \left(\frac{d}{2} + z \right) + e^{j\varphi} sh \Gamma \left(\frac{d}{2} - z \right) \right]^* \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi 1.42)$$

Интегральные относительные усилия выражаются в функции параметров

$$\bar{\omega}_i = \beta_1 + j\beta_2 = \frac{\Gamma d}{2} = \sqrt{\bar{a}^2 + j\bar{\omega}} = \bar{a} \sqrt{1 + j\varepsilon}, \quad \bar{a} = \frac{ad}{2},$$

где $\bar{\omega} = \mu\gamma\omega s \left(\frac{d}{2}\right)^2$, $\varepsilon = \mu\gamma\omega s \frac{1}{a^2}$, в следующем виде, [15], для согласного ($\varphi = 0$) и встречного ($\varphi = \pi$) включения индукторов соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{y \text{ согл}} &= \frac{1}{\mu} H_0^2 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f_y dz = \frac{\bar{a} \operatorname{Im} [\bar{\omega}_i \operatorname{sh} \bar{\omega}_i \operatorname{ch} \bar{\omega}_i^*]}{|\bar{\omega}_i \operatorname{sh} \bar{\omega}_i|^2} = \bar{a} \frac{\beta_2 \operatorname{sh} 2\beta_1 + \beta_1 \sin 2\beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)(\operatorname{ch} 2\beta_1 - \cos 2\beta_2)} \\ \bar{F}_{y \text{ встр}} &= \frac{\bar{a} \operatorname{Im} [\bar{\omega}_i \operatorname{ch} \bar{\omega}_i \operatorname{sh} \bar{\omega}_i^*]}{|\bar{\omega}_i \operatorname{ch} \bar{\omega}_i|^2} = \bar{a} \frac{\beta_2 \operatorname{sh} 2\beta_1 - \beta_1 \sin 2\beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)(\operatorname{ch} 2\beta_1 + \cos 2\beta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 1.43})$$

При произвольном угле сдвига фаз φ токов верхнего и нижнего индукторов усилие является линейной комбинацией $\bar{F}_{y \text{ согл}}$ и $\bar{F}_{y \text{ встр}}$.

$$\bar{F}_y = \frac{(1 + \cos \varphi) \bar{F}_{y \text{ согл}} + (1 - \cos \varphi) \bar{F}_{y \text{ встр}}}{2}. \quad (\text{П 1.44})$$

Поперечная составляющая интегрального усилия при произвольном φ выражается в виде

$$\bar{F}_z = \sin \varphi \frac{(\beta_1^2 - \beta_2^2) \operatorname{sh} 2\beta_1 \sin 2\beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)(\operatorname{sh}^2 2\beta_1 + \sin 2\beta_2)}. \quad (\text{П 1.44a})$$

Как видно, при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ распределение поля симметрично относительно середины слоя $z = 0$, поэтому $F_z = 0$.

П 1.3.6. Учет ослабления поля в зазоре между индуктором и проводящим слоем

Рассмотрим ослабление поля в зазоре δ_0 между односторонним индуктором, имеющим магнитопровод с бесконечной магнитной проницаемостью, и проводящим слоем толщиной d , имеющим характеристики γ и $\mu = \mu\mu_0$. Пространство над слоем заполнено непроводящей немагнитной средой.

В этом случае отношение напряженности на границе слоя H_{y0} к линейной токовой нагрузке индуктора A_0 выражается в виде, [15],

$$\frac{\dot{H}_{y0}}{A_0} = \left\{ 2\Gamma(a\bar{\mu} + \Gamma)e^{\Gamma d} + (a\bar{\mu} - \Gamma)e^{-\Gamma d} \right\} / \left\{ (a\bar{\mu} + \Gamma)[(a\bar{\mu} + \Gamma)e^{a\delta_0} - (a\bar{\mu} - \Gamma)e^{-a\delta_0}]e^{\Gamma d} - (a\bar{\mu} - \Gamma)[(a\bar{\mu} - \Gamma)e^{a\delta_0} - (a\bar{\mu} + \Gamma)e^{-a\delta_0}]e^{\Gamma d} \right\} \quad (\text{П 1.45})$$

Для проводящего полупространства, отделенного от индуктора на расстояние δ_0 , из (П 1.45) при $d \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{\dot{H}_{y0}}{A_0} = \frac{2\Gamma}{(\overline{a\mu} + \underline{\Gamma})e^{a\delta_0} - (\overline{a\mu} - \underline{\Gamma})e^{-a\delta_0}}. \quad (\text{П 1.46})$$

В [15] показано, что отношение (H_{y0}/A_0) слабо зависит от $\overline{\omega}$ и d/τ , т.е. от характеристик слоя. Если $\overline{\omega}$ невелико, ослабление поля в зазоре можно рассчитывать, как при холостом ходе индуктора (отсутствии проводящего слоя)

$$(\dot{H}_{y0}/A_0) = e^{-a\delta_0} = e^{-\pi\delta_0/\tau}. \quad (\text{П 1.47})$$

П 1.3.7. Особенности расчета при малом зазоре $\left(d = \frac{\delta}{2} \ll \tau\right)$

Для индукций в слое при малых $d = \frac{\delta}{2} \rightarrow 0$ и $\mu = \mu_0$ из (п 1.24) получаем

$$\begin{aligned} \dot{B}_y &= 0, \\ \dot{B}_z &= \frac{ja\mu_0 \dot{A}_H}{\underline{\Gamma}(\underline{\Gamma}d)} = j \frac{\mu_0 \dot{A}_H}{a(l + j\varepsilon)d}, \end{aligned} \quad (\text{П 1.48})$$

где $\varepsilon = \frac{\omega s \mu_0 \gamma}{a^2}$.

Для плотности тангенциального усилия при $d \rightarrow 0$ и $\mu = \mu_0$ из (1.41) получаем

$$f_y = \frac{a\gamma\omega s\mu_0^2 \dot{H}_0}{2|\underline{\Gamma}^2 d|^2} = \frac{l}{2} \frac{\mu_0}{a} \frac{\varepsilon}{l + \varepsilon^2} \left(\frac{H_0}{d}\right)^2, \quad (\text{П 1.49})$$

где $\dot{H}_0 = \dot{A}_H$, так как слой заполняет все пространство между сторонами индуктора.

Полученные выражения совпадают с приведенными в [8] и характеризуют индукционные преобразователи энергии с «поперечным» полем, имеющим лишь компоненту индукции по оси z (поперек слоя вторичного элемента). К ним, в частности, относятся линейные асинхронные двигатели транспортных средств [8].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА УСТРОЙСТВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

П 2.1. Расчет параметров четырехполюсников и напряженностей на их зажимах

Если кольцевая обмотка индуктора создает бегущее вдоль оси y синусоидальное магнитное поле, то в соответствии с рис. П 2.1 и [8] оно характеризуется следующими компонентами напряженности магнитного поля \bar{H} , электрического \bar{E} , плотности тока \bar{J} , векторного магнитного потенциала \bar{A}

$$\bar{H} = \bar{e}_y \dot{H}_y + \bar{e}_r \dot{H}_r, \quad \bar{E} = \bar{e}_\varphi \dot{E}, \quad \bar{J} = \bar{e}_\varphi \dot{J}, \quad \bar{A} = \bar{e}_\varphi \dot{A}. \quad (\text{П } 2.1)$$

Основное уравнение для комплексной амплитуды векторного магнитного потенциала k -го слоя записывается [8]

$$\frac{d^2 \dot{A}_{km}}{d(\Gamma_k r)^2} + \frac{1}{\Gamma_k r} \frac{d \dot{A}_{km}}{d(\Gamma_k r)} - \left(1 + \frac{1}{(\Gamma_k r)^2} \right) \dot{A}_{km} = 0, \quad (\text{П } 2.2)$$

где $\Gamma_k^2 = j\omega\mu_k\gamma_k s_k - \omega^2\mu_k\varepsilon_k + a_k^2$ аналогично (П 1.14);

$a_k = \pi/\tau_k$, s_k - скольжение слоя.

При этом в неподвижной системе координат $\bar{A}_{km}(r, y, t) = \dot{A}_{km} e^{j(\omega t - a_k y)} \bar{e}_\varphi$ и представляет собой бегущую по оси y волну (как и H_{km} , \dot{E}_{km}).

Если $\alpha_k = 0$, получаем случай плоской волны.

Решение (П 2.2) имеет вид

$$\dot{A}_{km} = \underline{C}_k I_1(\Gamma_k r) + \underline{D}_k K_1(\Gamma_k r), \quad (\text{П } 2.3)$$

где $I_1(\Gamma_k r)$ и $K_1(\Gamma_k r)$ – модифицированные функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода;

\underline{C}_k , \underline{D}_k - постоянные интегрирования.

Если учесть [8], что $\dot{E}_{km} = -j\omega\dot{A}_{km}$ и $\dot{H}_{km} = \frac{1}{\mu_k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_{km})$, то

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{km} &= -j\omega \underline{C}_k I_1(\Gamma_k r) - j\omega \underline{D}_k K_1(\Gamma_k r), \\ \dot{H}_{km} &= \frac{\Gamma_k}{\mu_k} \underline{C}_k I_0(\Gamma_k r) - \frac{\Gamma_k}{\mu_k} \underline{D}_k K_0(\Gamma_k r), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 2.4)$$

где $I_0(\underline{\Gamma}_k r)$ и $K_0(\underline{\Gamma}_k r)$ - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Нетрудно видеть, что в случае плоской волны решение (П 2.4) совпадает с [2, 5].
Для внешней полубесконечной области с ростом $r \rightarrow \infty$ поле должно затухать, поэтому

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}'_{km(r)} &= -j\omega D'_k K_1(\underline{\Gamma}_k' r), \\ \dot{H}'_{km(r)} &= -\frac{\underline{\Gamma}_k'}{\mu'_k} D'_k K_0(\underline{\Gamma}_k' r), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.5})$$

а «входное» (поверхностное) сопротивление области

$$\underline{z}_k' = \frac{j\omega\mu'_k}{\underline{\Gamma}_k'} \frac{K_1(\underline{\Gamma}_k' r)}{K_0(\underline{\Gamma}_k' r)} = \underline{z}_{ck}' \frac{K_1(\underline{\Gamma}_k' r)}{K_0(\underline{\Gamma}_k' r)}. \quad (\text{П 2.6})$$

Выражая с помощью (П 2.4) \dot{E} и \dot{H} на «входной» и «выходной» сторонах слоя « i », получаем уравнения, аналогичные (47).

Для внешних относительно обмотки 0 индуктора слоев входные величины выражаются через выходные (индекс « m » опускаем)

$$\left. \begin{aligned} r'_i \dot{E}'_i &= \underline{\Gamma}_i' r'_i b'_{4i} (r'_{i+1} \dot{E}'_{i+1}) + j\omega\mu'_i r'_{i+1} r'_i b'_{2i} (\dot{H}'_{i+1}), \\ \dot{H}'_i &= \frac{(\underline{\Gamma}_i')^2}{j\omega\mu_i} b'_{3i} (r'_{i+1} \dot{E}'_{i+1}) + \underline{\Gamma}_i' r'_{i+1} b'_{1i} (\dot{H}'_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.7})$$

или выходные через входные

$$\begin{bmatrix} \dot{E}'_{i+1} & r'_{i+1} \\ \dot{H}'_{i+1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}_i' r'_{i+1} b'_{1i} & -j\omega\mu'_i r'_{i+1} r'_i b'_{2i} \\ -\frac{(\underline{\Gamma}_i')^2}{j\omega\mu_i} b'_{3i} & \underline{\Gamma}_i' r'_i b'_{4i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r'_i \dot{E}'_i \\ \dot{H}'_i \end{bmatrix}, \quad (\text{П 2.8})$$

где

$$\left. \begin{aligned} b'_{1i} &= K_0(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) I_1(\underline{\Gamma}_i' r'_i) + I_0(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) K_1(\underline{\Gamma}_i' r'_i), \\ b'_{2i} &= K_1(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) I_1(\underline{\Gamma}_i' r'_i) - I_1(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) K_1(\underline{\Gamma}_i' r'_i), \\ b'_{3i} &= K_0(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) I_0(\underline{\Gamma}_i' r'_i) - I_0(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) K_0(\underline{\Gamma}_i' r'_i), \\ b'_{4i} &= K_1(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) I_0(\underline{\Gamma}_i' r'_i) + I_1(\underline{\Gamma}_i' r'_{i-1}) K_0(\underline{\Gamma}_i' r'_i). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.9})$$

Для внутренних слоев входные величины выражаются через выходные

$$\begin{bmatrix} r_i \dot{E}_i \\ \dot{H}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}_i r_i b_{li} & -j\omega\mu_i r_{i+1} r_i b_{2i} \\ -\frac{(\underline{\Gamma}_i)^2}{j\omega\mu_i} b_{3i} & \underline{\Gamma}_i r_{i+1} b_{4i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{i+1} \dot{E}_{i+1} \\ \dot{H}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{П 2.10})$$

или выходные через входные

$$\begin{bmatrix} r_{i+1} \dot{E}_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{li} & A_{2i} \\ A_{3i} & A_{4i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_i \dot{E}_i \\ H_i \end{bmatrix}, \quad (\text{П 2.11})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{li} &= \underline{\Gamma}_i r_{i+1} b_{4i}, \\ A_{2i} &= j\omega\mu_i r_{i+1} r_i b_{2i} = \underline{z}_{ci} r_{i+1} r_i \underline{\Gamma}_i b_{2i}, \\ A_{3i} &= \frac{\underline{\Gamma}_i^2}{j\omega\mu_i} b_{3i} = \frac{\underline{\Gamma}_i}{\underline{z}_{ci}} b_{3i}, \\ A_{4i} &= \underline{\Gamma}_i r_i b_{li}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.12})$$

Параметры четырехполюсников рис. П 2.2 выражаются в виде

$$\left. \begin{aligned} \underline{z}_{\beta i} &= \frac{1}{A_{3i}} = \frac{j\omega\mu_i}{\underline{\Gamma}_i^2 b_{3i}} = \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{\Gamma}_i b_{3i}}, \\ \underline{z}_{\alpha i} &= (\underline{A}_{li} - 1) \underline{z}_{\beta i} = \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{\Gamma}_i b_{3i}} (\underline{\Gamma}_i r_{i+1} b_{4i} - 1), \\ \underline{z}_{\gamma i} &= (\underline{A}_{4i} - 1) \underline{z}_{\beta i} = \frac{\underline{z}_{ci}}{\underline{\Gamma}_i b_{3i}} (\underline{\Gamma}_i r_i b_{li} - 1). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.13})$$

Дальнейший расчет аналогичен рассмотренному в разделе 6. Следует отметить также, что некоторые особенности связаны с исследованием активных слоев устройства. В рамках этой работы они, однако, не рассматриваются.

П 2.2. Аналитические выражения для основных величин в трехслойной системе [15]

Расчетная модель индуктора (с ферромагнитным магнитопроводом или без него) представляет собой цилиндр с токовой линейной нагрузкой \dot{A}_0 на его внутренней поверхности. Внутреннее пространство

является рабочим и имеет характеристики γ и μ . В общем случае оно движется в направлении оси Y со скоростью $v_y = 2\omega f(1-s) = \frac{\omega}{a}(1-s)$.

Структура модели 1:

ПОДОБЛАСТЬ 1, $r \leq R$ - рабочее пространство с $\gamma = \gamma$ и $\mu = \mu$,

при $r = R$ справедливы – непрерывность B_r и

$$\dot{H}_y(R-0) - \dot{H}_y(R+0) = A_\varphi = \dot{A}_0 e^{j(\omega t - ay)} \quad (\text{далее множитель } e^{j(\omega t - ay)} \text{ опускаем});$$

ПОДОБЛАСТЬ 2, $r > R$ - магнитопровод с $\gamma = 0$, $\mu = \mu'$,

при $r \rightarrow \infty$ справедливо $\dot{H}(\infty) = 0$.

Если индуктор имеет магнитопровод с $\mu' = \infty$, то [15]

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_r &= \frac{j a \mu \dot{A}_0}{\Gamma} \frac{I_1(\Gamma r)}{I_0(\Gamma R)} = -\frac{a}{\omega s} \dot{E}_\varphi, \\ \dot{B}_y &= \mu \dot{A}_0 \frac{I_0(\Gamma r)}{I_0(\Gamma R)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.14})$$

Поле холостого хода ($\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$) при наличии магнитопровода с $\mu' = \infty$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_r &= j \mu_0 \dot{A}_0 \frac{I_1(ar)}{I_0(aR)} = -\frac{a}{\omega} \dot{E}_\varphi, \\ \dot{B}_y &= \mu_0 \dot{A}_0 \frac{I_0(ar)}{I_0(aR)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.15})$$

и без магнитопровода ($\mu' = \mu_0$, $\sigma' = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_r &= j a \mu_0 R \dot{A}_0 K_1(aR) I_1(ar) = -\frac{a}{\omega} \dot{E}_\varphi, \\ \dot{B}_z &= a \mu_0 R \dot{A}_0 K_1(aR) I_0(ar). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.16})$$

При расчете усилий в общем случае принимается, что на поверхности индуктора с радиусом $r = R_l \leq R$ действует осевая составляющая напряженности $\dot{H}_y(R_l) = \dot{H}_0 e^{j(\omega t - ay)}$.

Компоненты плотности усилия [15]

$$\left. \begin{aligned} f_y &= \frac{a s \omega \gamma \mu^2 H_0^2}{2 |\Gamma|^2} \left| \frac{I_1(\Gamma r)}{I_0(\Gamma R_l)} \right|^2, \\ f_r &= \frac{s \omega \gamma \mu^2 H_0^2}{2 |\Gamma|^2} \frac{\text{Im} \left[\Gamma I_0(\Gamma r) I_1 \left(\frac{*}{\Gamma} r \right) \right]}{|I_0(\Gamma R_l)|^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 2.17})$$

Относительное интегральное усилие, действующее на отрезок цилиндра объемом $V = \pi R_l^2 l$, выражается далее в функции относительных параметров

$$\bar{\omega}_i = \underline{\Gamma} R_l = \sqrt{\bar{a}^2 \bar{\omega}} = \bar{a} \sqrt{1 + j\varepsilon},$$

где $\bar{a} = a R_l$; $\bar{\omega} = \mu \gamma \omega s R_l^2$; $\varepsilon = \mu \gamma \omega s \frac{l}{a^2}$;

$$\bar{F}_y = \frac{4}{R_l \mu H_0^2} \int_0^{R_l} f_y dr = \frac{F 2 R_l}{V \mu H_0^2} = \frac{2 \bar{a} J m \left[\bar{\omega}_i I_0(\bar{\omega}_i) I_l(\bar{\omega}_i^*) \right]}{\left| \bar{\omega}_i I_0(\bar{\omega}_i) \right|^2}. \quad (\text{П } 2.18)$$

Радиальная компонента усилия равна нулю, так как система симметрична относительно оси y .

Структура модели 2:

ПОДОБЛАСТЬ 1, $r < R_l$ - внутреннее пространство с $\gamma = 0$ и $\mu = \mu_l$,

при $r = R_l$ непрерывны $B_r(R_l)$ и $\dot{H}_y(R_l)$;

ПОДОБЛАСТЬ 2, $R_l \leq r \leq R_2$ - полый цилиндр с $\gamma = \gamma$, $\mu = \mu$,

при $r = R_2$ задана напряженность $H_y(R_2) = \dot{H}_0 e^{j(\omega t - ay)}$ (поворачивающий множитель далее опускаем).

Если индуктор двусторонний и его обмотки расположены вне и внутри полого цилиндра, то напряженности поля задаются на внешней и внутренней поверхностях цилиндра как

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}(R_l) &= -\dot{H}_0 e^{j(\omega t - ay + \varphi)}, \\ \dot{H}(R_2) &= \dot{H}_0 e^{j(\omega t - ay)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 2.19)$$

Относительное интегральное усилие вычисляется интегрированием плотности усилия по радиусу цилиндра

$$\bar{F} = \frac{F 2 R_2}{V \mu H_0^2} = \frac{4 R_2}{(R_2^2 - R_l^2) \mu H_0^2} \int_{R_l}^{R_2} f r dr, \quad (\text{П } 2.20)$$

где объем $V = \pi(R_2^2 - R_l^2)l$.

Выражения усилия для характерных случаев имеют вид [15]:

а) индуктор односторонний, пространство внутри цилиндра ($r < R_l$) заполнено непроводящей средой с $\mu_l = \mu_l \mu_0$:

$$\bar{F}_y = \frac{2 a R_l J m \left\{ \underline{\Gamma} R_2 [A I_0(\underline{\Gamma} R_2) + B K_0(\underline{\Gamma} R_2)] [A I_l(\underline{\Gamma} R_2) - B K_l(\underline{\Gamma} R_2)]^* \right\}}{\left(1 - R_l^2 / R_2^2 \right) \left| \underline{\Gamma} R_2 [A I_0(\underline{\Gamma} R_2) + B K_0(\underline{\Gamma} R_2)] \right|^2}, \quad (\text{П } 2.21)$$

$$\text{где } A = aR_I K_I(\underline{\Gamma}R_I) I_0(aR_I) + \bar{\mu}_I \underline{\Gamma}R_I K_0(\underline{\Gamma}R_I) I_I(aR_I), \left\{ \begin{array}{l} B = aR_I I_I(\underline{\Gamma}R_I) I_0(aR_I) - \bar{\mu}_I \underline{\Gamma}R_I I_0(\underline{\Gamma}R_I) I_I(aR_I). \end{array} \right\} \quad (\text{П 2.22})$$

б) **индуктор односторонний**, пространство внутри цилиндра заполнено идеальным ферромагнетиком с бесконечной магнитной проницаемостью $\mu_I = \infty$:

$$\bar{F}_y = 2aR_2 Jm \left\{ \underline{\Gamma}R_2 [K_0(\underline{\Gamma}R_I) I_0(\underline{\Gamma}R_2) - I_0(\underline{\Gamma}R_I) K_0(\underline{\Gamma}R_2)] \times [K_0(\underline{\Gamma}R_I) I_I(\underline{\Gamma}R_2) + I_0(\underline{\Gamma}R_I) K_I(\underline{\Gamma}R_2)]^* \right\} / \left\{ \left(1 - R_I^2 / R_2^2 \right) \left| \underline{\Gamma}R_2 [K_0(\underline{\Gamma}R_I) I_0(\underline{\Gamma}R_2) - I_0(\underline{\Gamma}R_I) K_0(\underline{\Gamma}R_2)] \right|^2 \right\}. \quad (\text{П 2.23})$$

в) **индуктор двусторонний**:

$$\bar{F}_y = \frac{2aR_2}{\left(1 - R_I^2 / R_2^2 \right) |\underline{\Gamma}R_2|^2} Jm \left[\frac{\underline{\Gamma}R_2 M^* \pm \underline{\Gamma}R_I N^*}{S^*} \right], \quad (\text{П 2.24})$$

$$\text{где } \left\{ \begin{array}{l} M = I_I(\underline{\Gamma}R_2) K_0(\underline{\Gamma}R_I) + I_0(\underline{\Gamma}R_I) K_I(\underline{\Gamma}R_2) \pm I / \underline{\Gamma}R_2, \\ N = \pm I_0(\underline{\Gamma}R_2) K_I(\underline{\Gamma}R_I) \pm I_I(\underline{\Gamma}R_I) K_0(\underline{\Gamma}R_2) + I / \underline{\Gamma}R_I, \\ S = I_0(\underline{\Gamma}R_2) K_0(\underline{\Gamma}R_I) - I_0(\underline{\Gamma}R_I) K_0(\underline{\Gamma}R_2). \end{array} \right\} \quad (\text{П 2.25})$$

Верхний знак относится к согласному включению сторон индуктора ($\varphi = 0$), а нижний – к встречному ($\varphi = \pi$).

Ослабление поля зазором между внешним односторонним индуктором с радиусом R и сплошным цилиндром с радиусом R_2 и характеристиками γ и μ характеризуется отношением H_{y0} к токовой линейной нагрузке индуктора A_0 [15]:

а) индуктор имеет магнитопровод с $\mu' = \infty$:

$$\frac{H_{y0}}{A_0} = \frac{I}{a} \left[-\frac{\bar{a} I_I(\bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}_i I_0(\bar{\omega}_i)} S_2 + S_4 \right]^{-I}; \quad (\text{П 2.26})$$

б) индуктор не имеет магнитопровода

$$\frac{H_{y0}}{A_0} = \frac{I}{a} \left\{ \frac{\bar{a} I_I(\bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}_i I_I(\bar{\omega}_i)} \left[\frac{K_0(\bar{a}')}{K_I(\bar{a}')} S_1 - S_2 \right] - \left[\frac{K_0(\bar{a}')}{K_I(\bar{a}')} S_3 - S_4 \right] \right\}^{-I}, \quad (\text{П 2.27})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } S_1 &= I_0(\bar{a})K_1(\bar{a}') + K_0(\bar{a})I_1(\bar{a}'); \quad S_2 = I_0(\bar{a})K_0(\bar{a}') + K_0(\bar{a})I_0(\bar{a}'), \\ S_3 &= I_1(\bar{a})K_1(\bar{a}') - K_1(\bar{a})I_1(\bar{a}'); \quad S_4 = I_1(\bar{a})K_0(\bar{a}') + K_1(\bar{a})I_0(\bar{a}'), \\ \bar{a}' &= aR. \end{aligned} \right\} \text{ (П 2.28)}$$

Наличие цилиндра слабо влияет на H_{y0}/A_0 , поэтому при небольших значениях $\bar{\omega}$ распределение поля можно принимать таким же, как при холостом ходе [15]:

$$H_{z0}/A_0 = I_0(aR_2)/I_0(aR); \quad (\text{П 2.29})$$

в) индуктор двусторонний с магнитопроводами ($\mu' = \infty$), включение сторон согласное ($\varphi = 0$), полый цилиндр толщиной d с γ и μ , зазор с каждой стороны слоя цилиндра $(\delta - d)/z$:

$$\frac{H_{y0}}{A_0} = \left[ch(\bar{a}' - \bar{a}) + \frac{\bar{a}\mu}{\omega_i} sh(\bar{a}' - \bar{a})cth\bar{\omega}_i \right]^{-1}, \quad (\text{П 2.30})$$

где $\bar{a}' = a\delta/z$.

ДВУСТОРОННЕЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ [4]

Отличие данного случая от рассмотренных ранее поясняет рис. П 2.1. Если ранее мощность поступала в слой лишь с одной стороны, как показано на рис. П 3.1,а, с помощью вектора Пойнтинга $S(0)$, то в данном случае мощность поступает с двух сторон (рис. П 3.1,б и П 3.1,в). Соотношение мощностей $S(0)$ и $S(d)$ определяется соотношением H_{mS1} и H_{mS2} на поверхностях слоя. Чаще всего рассматриваются симметричные случаи:

- на рис. П 3.1,б $H_{mS1} = H_{mS2}$ (симметрия), а $E_{mS1} = -E_{mS2}$ (антисимметрия);
- на рис. П 3.1,в $H_{mS1} = -H_{mS2}$ (антисимметрия), а $E_{mS1} = E_{mS2}$ (симметрия).

Реально первому случаю соответствует слой сердечника индуктора с заданным магнитным потоком через него, а второму – шина с заданным током.

Рассмотрим названные случаи отдельно.

П 3.1. Базовый случай одностороннего падения волны

В соответствии с (21 б) и учетом обозначений и нумерации, принятых на рис. П 3.1,а, для слоя 2 можем записать

$$\dot{H}_m(z) = H_{mS1} \frac{e^{\underline{\Gamma}_2(d-z)} - M_{23}e^{-\underline{\Gamma}_2(d-z)}}{e^{\underline{\Gamma}_2d} - M_{23}e^{-\underline{\Gamma}_2d}} \quad (\text{П 3.1})$$

и для плотности тока

$$\dot{J}_m(z) = \frac{-\partial \dot{H}_m(z)}{\partial z} = \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} \frac{e^{\underline{\Gamma}_2(d-z)} + M_{23}e^{-\underline{\Gamma}_2(d-z)}}{e^{\underline{\Gamma}_2d} - M_{23}e^{-\underline{\Gamma}_2d}}. \quad (\text{П 3.2})$$

При $\underline{z}_2 \ll \underline{z}_1$ и $\underline{z}_2 \ll \underline{z}_3$, т. е. $M_{23} = I$, получаем [4]

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m(z) &= H_{mS1} \frac{sh \underline{\Gamma}_2(d-z)}{sh \underline{\Gamma}_2d}, \\ \dot{J}_m(z) &= \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} \frac{ch \underline{\Gamma}_2(d-z)}{ch \underline{\Gamma}_2d}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 3.3})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m(0) &= \dot{H}_{mS1}, H_m(d) = 0, \\ J_m(0) &= \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} cth \underline{\Gamma}_2d, \dot{J}_m(d) = \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} \frac{I}{sh \underline{\Gamma}_2d}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П 3.4})$$

активная мощность в слое

$$P_2 = P(0) - P(d) = \chi \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2 \gamma_2}} \frac{H_{mS1}^2}{2}, \quad (\text{П } 3.5)$$

где $\chi = \frac{sh 2kd + \sin 2kd}{ch 2kd - \cos 2kd}$;

$$k = \sqrt{\omega \mu_2 \gamma_2 / 2}.$$

Реактивная мощность в слое

$$Q_2 = Q(0) - Q(d) = \xi \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2 \gamma_2}} \frac{H_{mS1}^2}{2}, \quad (\text{П } 3.6)$$

где $\xi = \frac{sh 2kd - \sin 2kd}{ch 2kd - \cos 2kd}$.

П 3.2. Случай 2 (симметрия H_{mS1} и H_{mS2}) – сердечник

Решение для $\dot{H}_m(z)$ (рис. П 3.2,б) находим наложением двух решений – (П 3.1) для прямой волны и аналогичного решения для обратной волны, которое получается из (П 3.1) при замене координаты z на $(d - z) = z'$ и M_{23} на $M_{21} = \frac{\underline{z}_1 - \underline{z}_{cz}}{\underline{z}_1 + \underline{z}_{cz}}$.

В результате имеем

$$\dot{H}_m(z) = H_{mS1} \frac{e^{\underline{\Gamma}_2(d-z)} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2(d-z)}}{e^{\underline{\Gamma}_2 d} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 d}} + H_{mS2} \frac{e^{\underline{\Gamma}_2 z} - M_{21} e^{-\underline{\Gamma}_2 z}}{e^{\underline{\Gamma}_2 d} - M_{21} e^{-\underline{\Gamma}_2 d}}. \quad (\text{П } 3.7)$$

При полной симметрии (когда $H_{mS1} = H_{mS2}$, $\underline{z}_1 = \underline{z}_3$ и $M_{21} = M_{23}$)

$$\dot{H}_m(z) = H_{mS1} \frac{2ch \underline{\Gamma}_2 \left(\frac{d}{2} - z \right) \left(e^{\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} \right)}{e^{\underline{\Gamma}_2 d} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 d}} \quad (\text{П } 3.8)$$

и для плотности тока

$$\dot{J}_m(z) = \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} \frac{2sh \underline{\Gamma}_2 \left(\frac{d}{2} - z \right) \left(e^{\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} \right)}{e^{\underline{\Gamma}_2 d} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 d}}. \quad (\text{П } 3.9)$$

В случае $M_{23} = I \quad (z_3 \gg z_{c2})$ [4]

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m(z) &= H_{mS1} \frac{ch \Gamma_2 \left(\frac{d}{2} - z \right)}{ch \Gamma_2 \frac{d}{2}}, \\ j_m(z) &= \Gamma_2 H_{mS1} \frac{sh \Gamma_2 \left(\frac{d}{2} - z \right)}{sh \Gamma_2 \frac{d}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m(0) &= H_{mS1}, \quad H_m(d) = H_{mS1}, \\ j_m(0) &= \Gamma_2 H_{mS1} th \Gamma_2 \frac{d}{2}, \quad j_m(d) = -\Gamma_2 H_{mS1} th \Gamma_2 \frac{d}{2}. \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П } 3.11)$$

Активная мощность в слое

$$P_2 = 2P(0) = \xi \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\gamma_2}} H_{mS1}^2 = \xi P_{\text{баз}}, \quad (\text{П } 3.12)$$

где $\xi = \frac{shkd - sin kd}{chkd + cos kd}$.

Реактивная мощность в слое

$$Q_2 = 2Q(0) = \psi \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\gamma_2}} H_{mS1}^2, \quad (\text{П } 3.13)$$

где $\psi = \frac{shkd + sin kd}{chkd + cos kd}$.

П 3.3. Случай 3 (антисимметрия H_{mS1} и H_{mS2}) – шина

Решение получается из (П 3.7) - рис. П 3.2,в - при смене знака перед H_{mS2} . Если к тому же $|H_{mS1}| = |H_{mS2}|$ и $M_{21} = M_{23}$, получаем

$$\dot{H}_m(z) = H_{mS1} \frac{2sh\underline{\Gamma}_2 \left(\frac{d}{2} - z \right) \left(e^{\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} + M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} \right)}{e^{\underline{\Gamma}_2 d} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 d}} \quad (\Pi 3.14)$$

и для плотности тока

$$\dot{J}_m(z) = \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} \frac{2ch\underline{\Gamma}_2 \left(\frac{d}{2} - z \right) \left(e^{\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} + M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}} \right)}{e^{\underline{\Gamma}_2 d} - M_{23} e^{-\underline{\Gamma}_2 d}}. \quad (\Pi 3.15)$$

В случае $M_{23} = 1$ ($z_3 \gg z_{c2}$) [4]

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m(z) &= H_{mS1} \frac{sh\underline{\Gamma}_2 \left(\frac{d}{2} - z \right)}{sh\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}}, \\ \dot{J}_m(z) &= \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} \frac{ch\underline{\Gamma}_2 \left(\frac{d}{2} - z \right)}{sh\underline{\Gamma}_2 \frac{d}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (\Pi 3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} H_m(0) &= H_{mS1}, \quad H_m(d) = -H_{mS1}, \\ J_m(0) &= \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} cth \frac{\underline{\Gamma}_2 d}{2}, \quad J_m(d) = \underline{\Gamma}_2 H_{mS1} cth \frac{\underline{\Gamma}_2 d}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (\Pi 3.17)$$

Активная мощность в шине

$$P_l = 2P(0) = \eta \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\gamma_2}} H_{mS1}^2, \quad (\Pi 3.18)$$

где $\eta = \frac{shkd + sin kd}{chkd - cos kd} = \frac{2}{kd} k_R;$

$$k_R = \frac{R \sim}{R_{=}} = \frac{kd}{2} \frac{shkd + sin kd}{chkd - cos kd} \quad (\Pi$$

3.19)

- коэффициент увеличения активного сопротивления шины при переменном токе (при $f = 0$ имеем $k_R = 1$).

Реактивная мощность в шине

$$Q_2 = 2Q(0) = \chi \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\gamma_2}} H_{mSI}^2, \quad (\text{П } 3.20)$$

где $\chi = \frac{shkd - \sin kd}{chkd - \cos kd} = \frac{kd}{3} k_X;$

$$k_X = \frac{X}{X_0} = \frac{3}{kd} \frac{shkd - \sin kd}{chkd - \cos kd} \quad (\text{П } 3.21)$$

- коэффициент уменьшения реактивного сопротивления шины при переменном токе (при $f = 0$ получаем $k_X = 1$);

X_0 - реактивное сопротивление при равномерной плотности тока.

Зависимости относительных мощностей ξ и ψ , η и χ для указанных случаев заимствованы из [4] и приведены на рис. П 3.2 и П 3.3.

РАСЧЕТ МОЩНОСТЕЙ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ НА ОСНОВЕ [11]

Методика расчета мощностей и КПД установки индукционного нагрева на основе [11] сводится к следующим операциям.

1. Расчет эквивалентной глубины проникновения волны, м,

$$\Delta_{\vartheta} = 503 \sqrt{\rho / \mu_r f}, \quad (\text{П } 4.1)$$

где ρ - удельное сопротивление металла, Ом·м;

μ_r - относительная магнитная проницаемость слоя (для диэлектрика $\mu_r = 1$).

2. Удельные мощности, приходящиеся на 1 м² поверхности нагреваемого тела, кВт/м² и кВ·А/м²,

$$\left. \begin{array}{l} \text{активная} \quad P_{y\partial} = 2 \cdot 10^{-6} (I_1 w_{l,0})^2 \sqrt{\rho \mu_r f} F_{нл.ц}, \\ \text{реактивная} \quad Q_{y\partial} = 2 \cdot 10^{-6} (I_1 w_{l,0})^2 \sqrt{\rho \mu_r f} G_{нл.ц}, \end{array} \right\} \quad (\text{П } 4.2)$$

где зависимости $F_{нл.ц}$, $G_{нл.ц}$ приведены на рис. П 4.1;

$\Delta_{нл}$ - толщина плоского нагреваемого изделия;

r_0 - радиус наружной поверхности цилиндрической детали;

$I_1 w_{l,0}$ - ампервитки на единицу длины индуктора.

Для полуограниченного тела (или плиты с относительной толщиной $2\Delta_{нл}/\Delta_{\vartheta} \geq 3$) и для цилиндров с $(r_0 \sqrt{2}/\Delta_{\vartheta}) \geq 10$ можно принять $F_{нл.ц} = G_{нл.ц} = 1$, т.е. $P_{y\partial} = Q_{y\partial}$, а коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{P_{y\partial}}{\sqrt{P_{y\partial}^2 + Q_{y\partial}^2}} = 0,707. \quad (\text{П } 4.3)$$

Для сравнительно «тонких» плит и «тонких» цилиндров $F_{нл.ц}$ и $G_{нл.ц}$ определяются по рис. П 4.1, при этом

$$\cos \varphi_{нл.ц} = \frac{1}{1 + (G_{нл.ц} / F_{нл.ц})^2}. \quad (\text{П } 4.4)$$

3. Для отыскания удельной погонной мощности, т.е. мощности на единицу длины нагреваемого цилиндрического тела, следует (П 4.2) умножить на площадь боковой поверхности цилиндра $S_4 = \pi d_0 l$ и разделить на длину цилиндра l .

Получим для P_n , кВт/м, и Q_{II} , квар/м, соответственно

$$\left. \begin{aligned} P_n &= 6,2 \cdot 10^{-6} (I_I w_{I,0})^2 d_0 \sqrt{\rho \mu_r f} F_u, \\ Q_n &= 6,2 \cdot 10^{-6} (I_I w_{I,0})^2 d_0 \sqrt{\rho \mu_r f} G_u. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 4.5)$$

4. Удельные погонные потери мощности в цилиндрическом индукторе определяются так же, как и мощности в нагреваемом цилиндре. Необходимо лишь учесть коэффициент заполнения индуктора проводниковым материалом $k_{zu} = h_{вит.u} / \tau_{вит.u}$:

$$\left. \begin{aligned} P_{nu} &= 6,2 \cdot 10^{-6} (I_I w_{I,0})^2 \frac{d_u}{k_{zu}} \sqrt{\rho_u f} F_u, \\ Q_{nu} &= 6,2 \cdot 10^{-6} (I_I w_{I,0})^2 \frac{d_u}{k_{zu}} \sqrt{\rho_u f} G_u, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П } 4.6)$$

где $h_{вит.u}$ - высота витка индуктора;

$\tau_{вит.u}$ - шаг намотки витков.

Для уменьшения потерь в индукторе желательно иметь $F_{nl} = I$, т.е. $2\Delta_u \geq 2,7\Delta_{zu}$ и $\Delta_u \geq 1,35\Delta_{zu}$.

5. Электрический КПД системы «индуктор – нагреваемое тело»

$$\eta_{\text{э}} = \frac{P_n}{P_n + P_{nu}} = \frac{I}{1 + P_{nu}/P_n}. \quad (\text{П } 4.7)$$

При больших частотах, когда $(r_0 \sqrt{2} / \Delta_{\text{э}}) \geq 7$, предельный КПД можно найти с помощью выражения

$$\eta_{\text{э} \text{ пр}} = \frac{I}{1 + \frac{d_u}{d_0 k_{zu}} \sqrt{\frac{\rho_u \mu_{ru}}{\rho \mu_r}}}, \quad (\text{П } 4.8)$$

причем $\eta_{\text{э}}$ и $\cos \varphi$ уменьшаются с ростом зазора между деталью и индуктором и уменьшением k_{zu} .

При снижении $\sqrt{\rho_u \mu_{ru} / \rho \mu_r}$ КПД растет (обычно индуктор выполняется из меди и $\mu_{ru} = I$).

РАСЧЕТ НАГРЕВАТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА СТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА [12, 13, 14]

На рис. П 5.1 показаны система «цилиндрический индуктор – стальной цилиндр» и ее электрическая схема замещения (б). Основные обозначения: l_1 , l_2 - длины индуктора и заготовки; d_1 , d_2 - диаметры индуктора и заготовки; z_{m2} - магнитное сопротивление стального цилиндра (заготовки); R_{mS} и R_{m0} - магнитные сопротивления, соответствующие потокам рассеяния в зазоре между индуктором и металлом и вне системы; \dot{U} , I_u - напряжение питания и ток индуктора; w – число его витков. На схеме рис. П 5.1,б показаны соответствующие магнитным сопротивлениям рис. П 5.1,а электрические сопротивления, а также сопротивления R_I и X_{Im} обмотки индуктора.

Схема расчета [14]

1. Определяем глубину проникновения поля в индуктор и в сталь, м

$$\Delta = 503 \sqrt{\rho / \mu f}.$$

2. Задаемся размерами индуктора (внутренний радиус r_I и длина l_I) и определяем активное и реактивное сопротивления пустого медного индуктора, Ом,

$$R_I = 1,75 \cdot 10^{-6} \frac{r_I}{l_I} \sqrt{f} w^2 k_{RI},$$

$$X_I = 24,8 \cdot 10^{-8} \frac{f r_I^2 w^2}{l_I + 0,9 r_I},$$

где k_{RI} - коэффициент, учитывающий увеличение сопротивления при малых толщинах стенки индуктора.

3. Определяем активное и реактивное сопротивления заготовки, Ом,

$$R_2 = 8,6 \frac{\rho_2}{\Delta_2} \frac{r_2}{l_2},$$

$$X_{2m} = 6,28 \frac{\rho_2}{\Delta_2} \frac{r_2}{l_2}.$$

4. Находим индуктивные сопротивления в зазоре X_s и обратного замыкания магнитного потока X_0 , Ом,

$$X_s = 24,8 \cdot 10^{-8} f \frac{r_1^2 - r_2^2}{l_2},$$

$$X_0 = 24,8 \cdot 10^{-8} f \frac{r_1^2 k_{X1}}{l_1 - l_2 k_{X1}},$$

где с некоторым приближением

$$k_{X1} \approx \frac{l}{l + 0,9 \frac{r_1}{l_1}}.$$

Коэффициент приведения параметров

$$C = \frac{X_0^2}{R_2^2 + (X_0 + X_s + X_{2m})^2}.$$

5. Сопротивления нагруженного индуктора, Ом,

$$R = R_l + w^2 C R_2,$$

$$X = w^2 C \left[X_s + X_{2m} + \frac{R_2^2 + (X_s + X_{2m})^2}{X_0} \right],$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

6. Электрический КПД

$$\eta_3 = \frac{R - R_l}{R}.$$

7. Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = R/Z.$$

8. Активная и реактивная мощности индуктора, кВт и квар,

$$P = \frac{U^2}{Z^2} R \cdot 10^{-3},$$

$$Q = \frac{U^2}{Z^2} X \cdot 10^{-3}.$$

9. Ток индуктора, А,

$$I_u = U/Z.$$

10. Число витков. Если число витков заранее неизвестно, то в расчете полагаем $w = I$ и затем число витков находим по формуле

$$w = \frac{U}{Z'} \sqrt{\frac{R'}{P \cdot 10^{-3}}},$$

где Z' и R' – сопротивления при $w = I$.

При расчете глубины проникновения поля в сталь следует учитывать зависимости ее ρ и μ от температуры и напряженности магнитного поля H [12].

Усредненная температурная зависимость удельного сопротивления (для ст.45) приведена ниже

$t, ^\circ C$	20	100	200	300	400	500	600
$\rho; 10^{-7}$, Ом·м	1,89	2,38	3,12	3,99	5,04	6,26	7,7

Магнитная проницаемость μ стали является функцией H и $t, ^\circ C$, т.е.

а) для области сильных полей ($H > 4 \cdot 10^3$ А/м) усредненная зависимость $\mu(H)$ стали:

$H \cdot 10^3$, А/м	4	8	15,9	23,9	39,9	79,7	159,4
μ	299	164	89,2	63,3	39,7	21,0	11,1

$H \cdot 10^3$, А/м	239,1	318,8	358,7	398,5	477	557
μ	7,8	6,1	5,5	5,1	4,4	3,9

б) до $t = 500 - 600^\circ C$ μ снижается с ростом $t, ^\circ C$ незначительно, а затем резко падает до $\mu = 1$ при точке Кюри ($\sim 770^\circ C$); зависимость $\mu(t, ^\circ C)$ описывается выражением

$$\mu_t = 1 + (\mu_{20} - 1)\varphi(t),$$

где μ_{20} - относительная магнитная проницаемость стали при $20^\circ C$ для заданного значения H ;

$\varphi(t)$ - функция, вводящая поправку на температуру и заданная графиком рис. П 5.2.

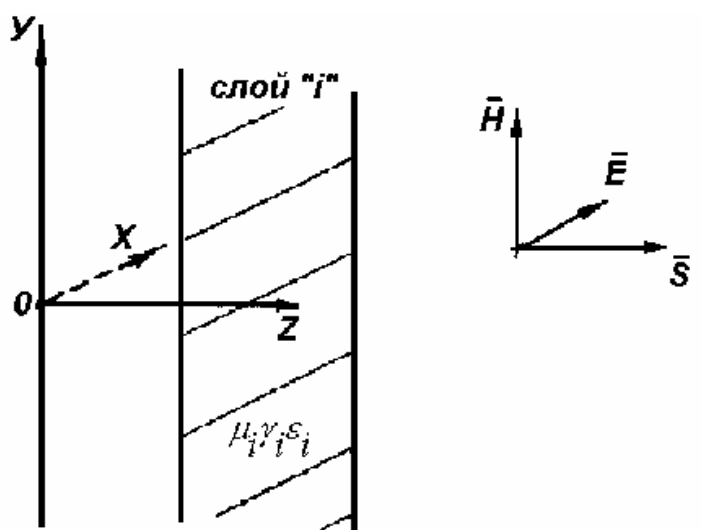


Рис. 1. Система координат и направления векторов напряженностей ЭМП

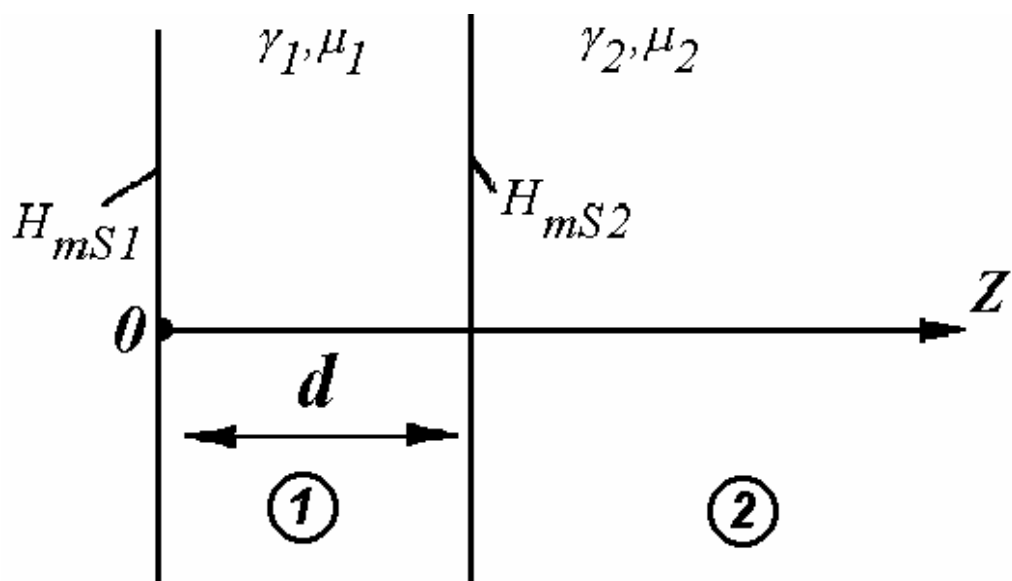


РИС. 3. ДВУХСЛОЙНАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

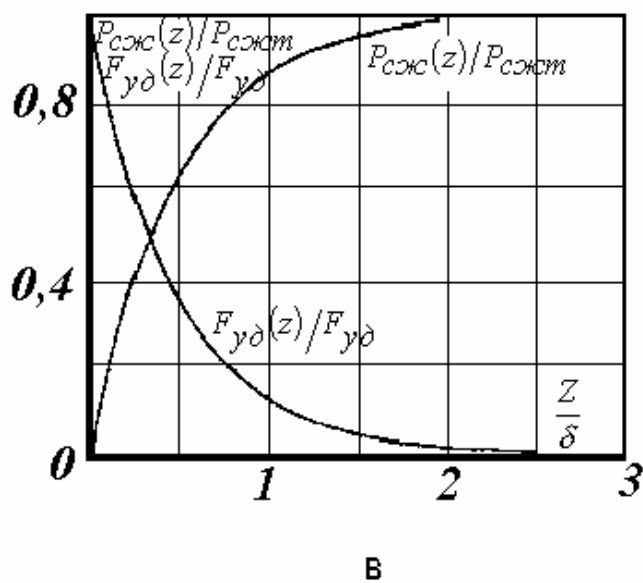
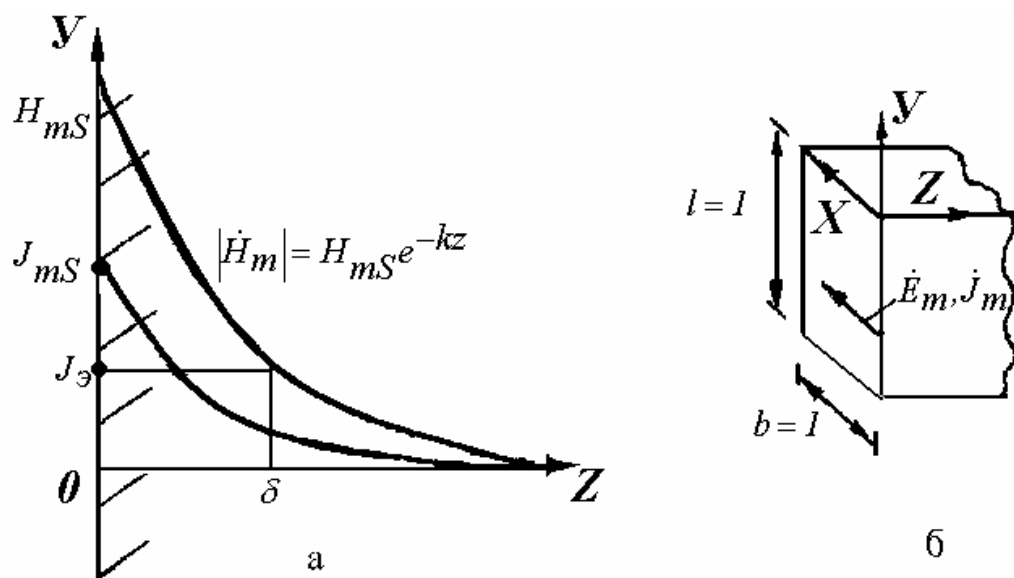


Рис. 2. Распределение напряженности H_m и плотности тока J_m (а), относительных удельных сил $F_{y\partial}$ и давлений $P_{сж}$ (в) в металлическом полупространстве и его единичный участок (б)

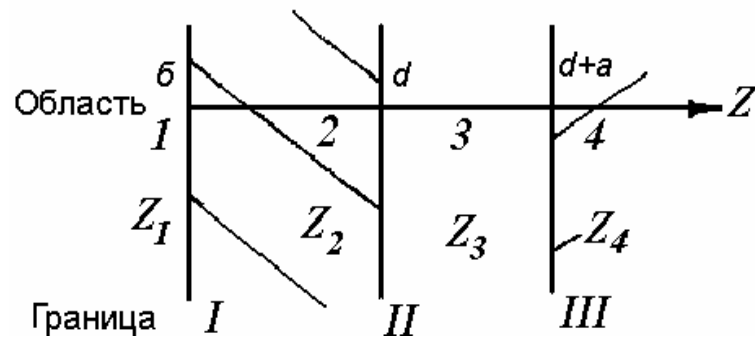
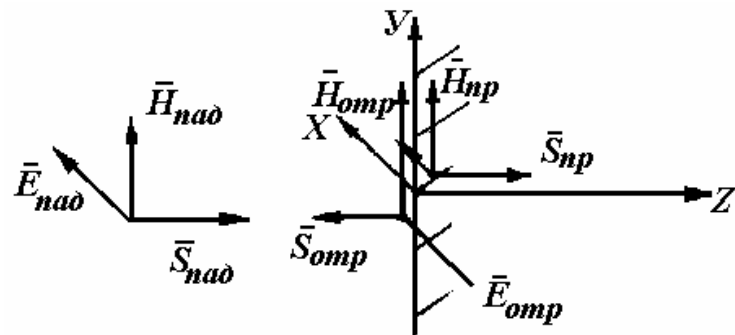
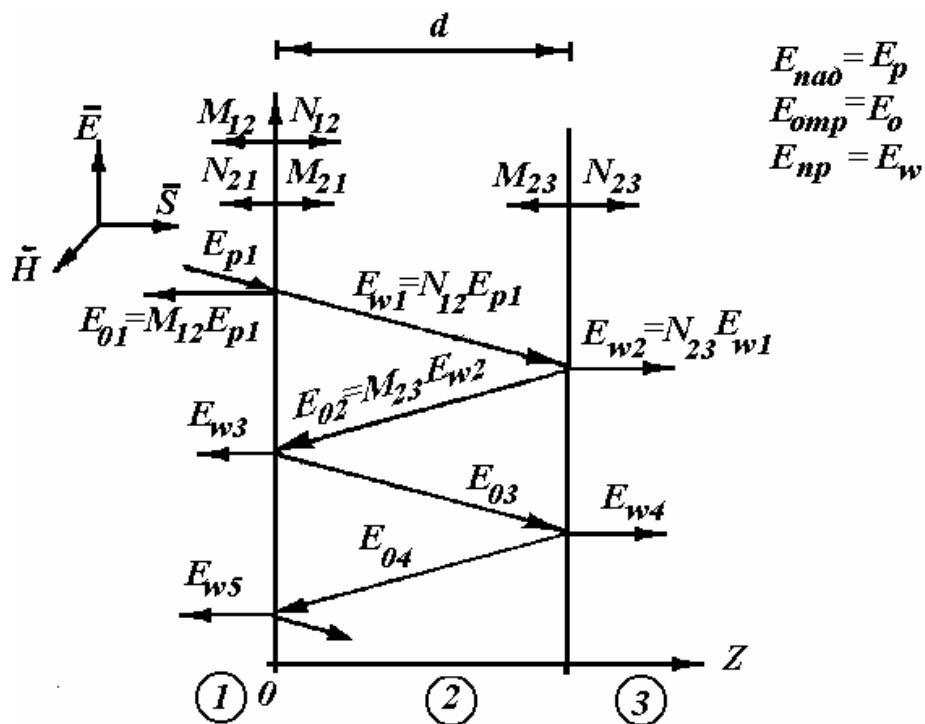


Рис. 4. Трехслойная структура



а



б

Рис. 5. Векторы напряженностей и Пойнтинга для падающей, отраженной и преломленной волн ЭМП (а), а также схема отражения и преломления волн (б)

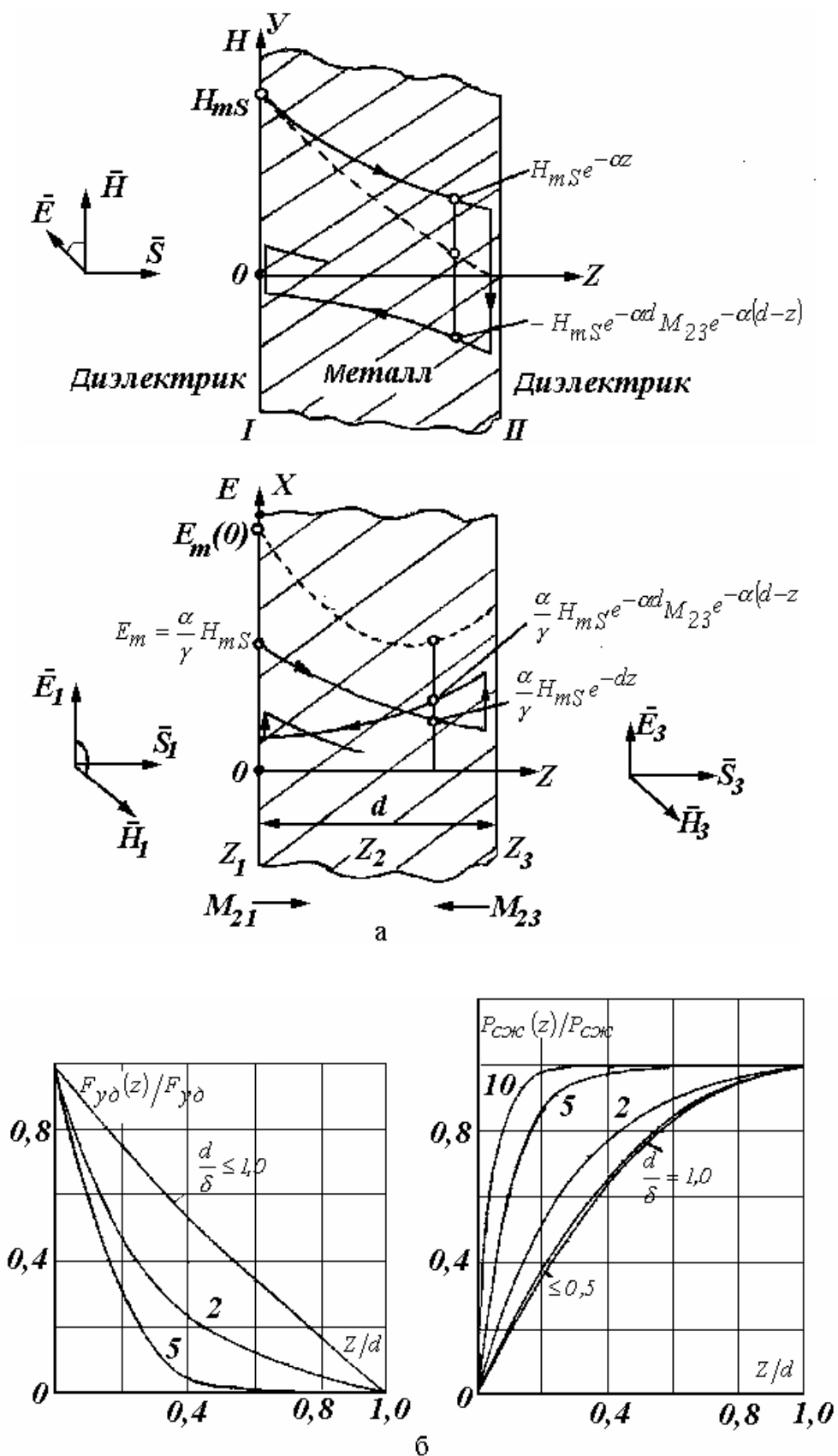


Рис. 6. Схема суперпозиции волн (а), а также зависимости относительных удельных сил F_{y0} и давлений $P_{сж}$ (б) в металлическом слое

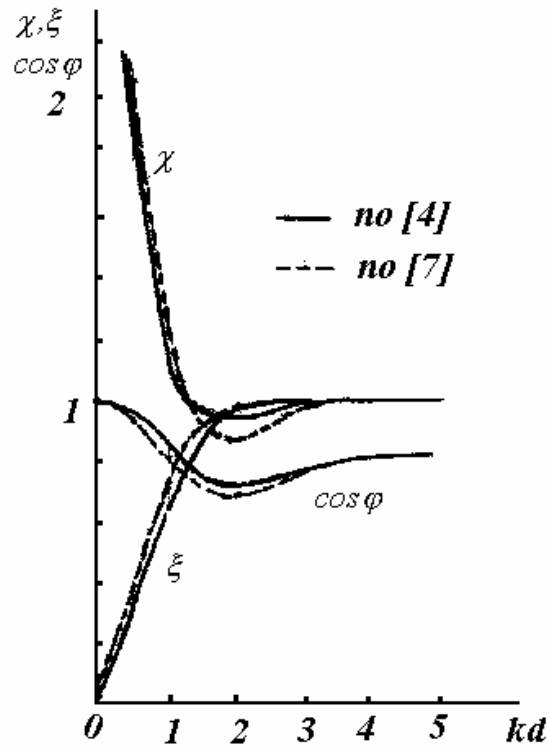
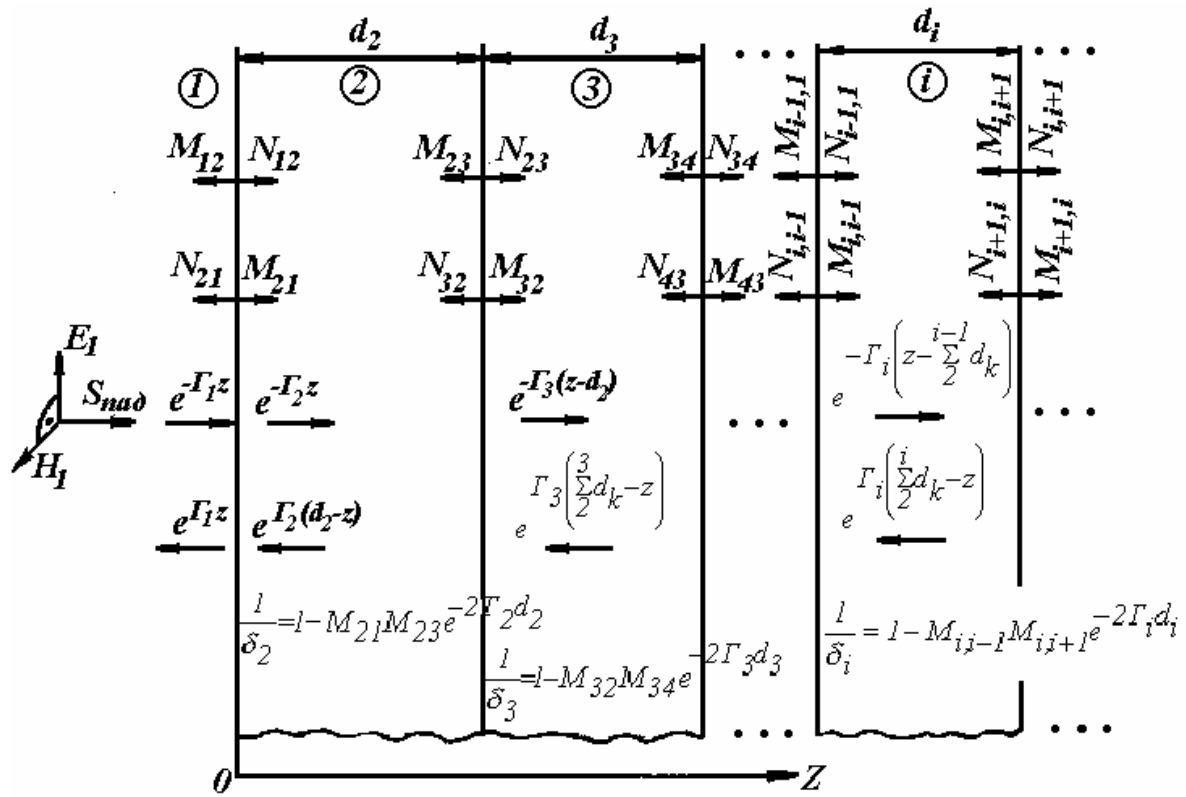
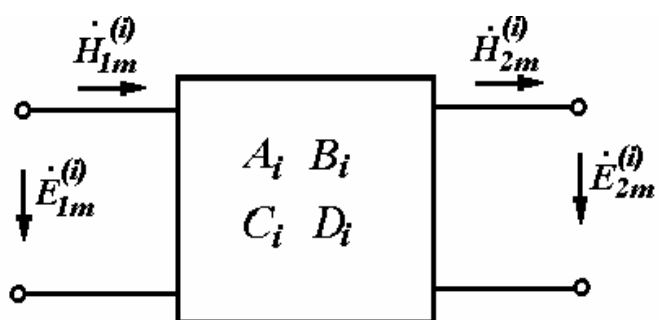


Рис. 7. Зависимости $\cos \varphi$, удельных активной χ и реактивной ξ

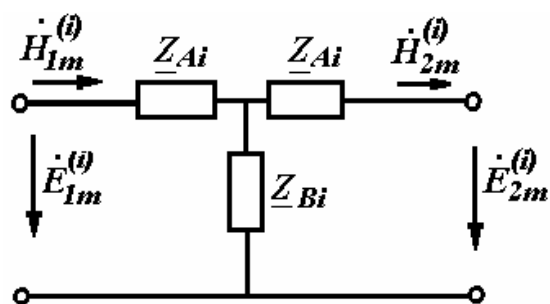


мощностей металлического слоя от его относительной толщины $kd = \frac{d}{\delta} = d_*$

РИС. 8. СХЕМА СУПЕРПОЗИЦИИ ВОЛН ЭМП В МНОГОСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ



а



б

Рис. 9. Четырехполюсник слоя (а) и его Т-образная схема замещения (б)

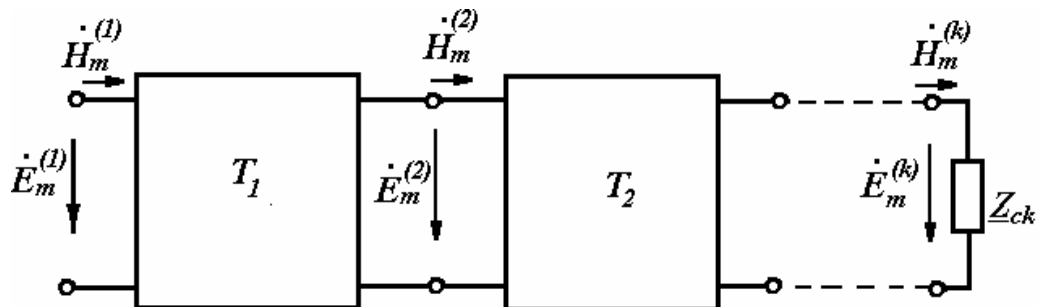


Рис. 10. Каскадное включение четырехполюсников

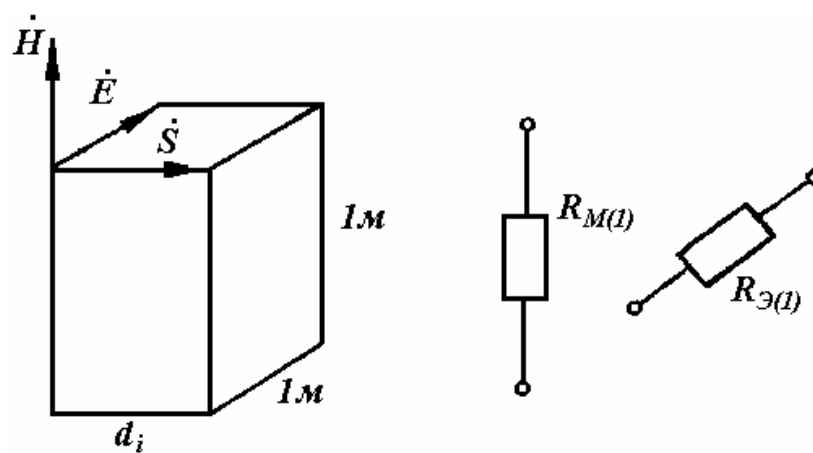


Рис. 11. Единичный участок слоя и его магнитное
и электрическое сопротивления

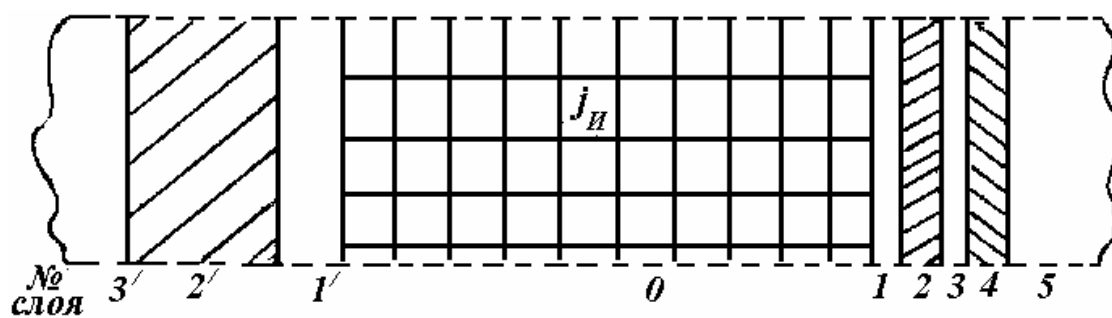
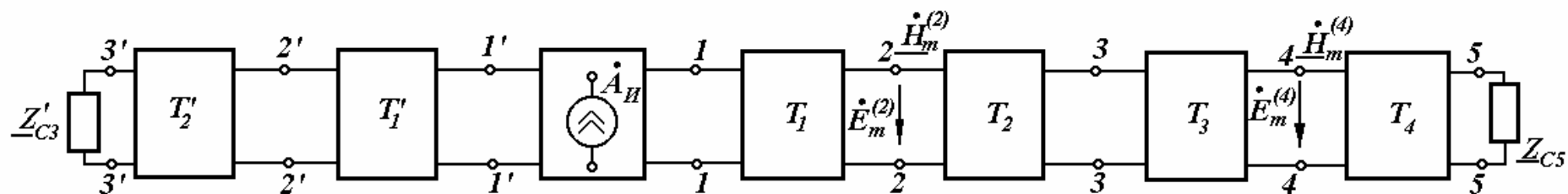
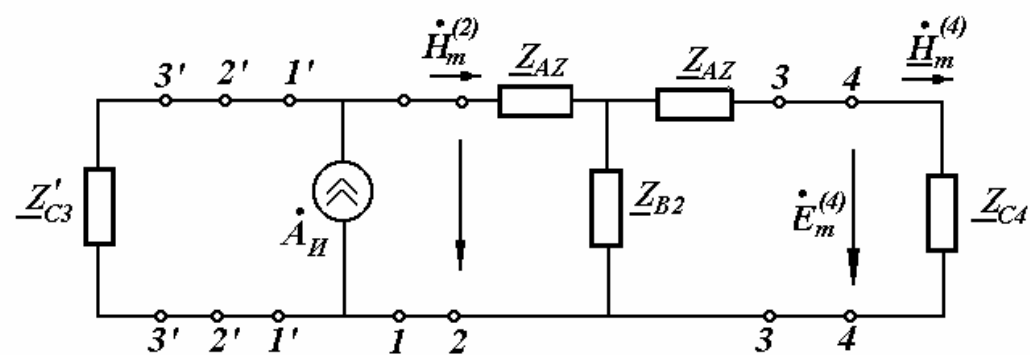


РИС. 12. РАСЧЕТНАЯ ОБЛАСТЬ



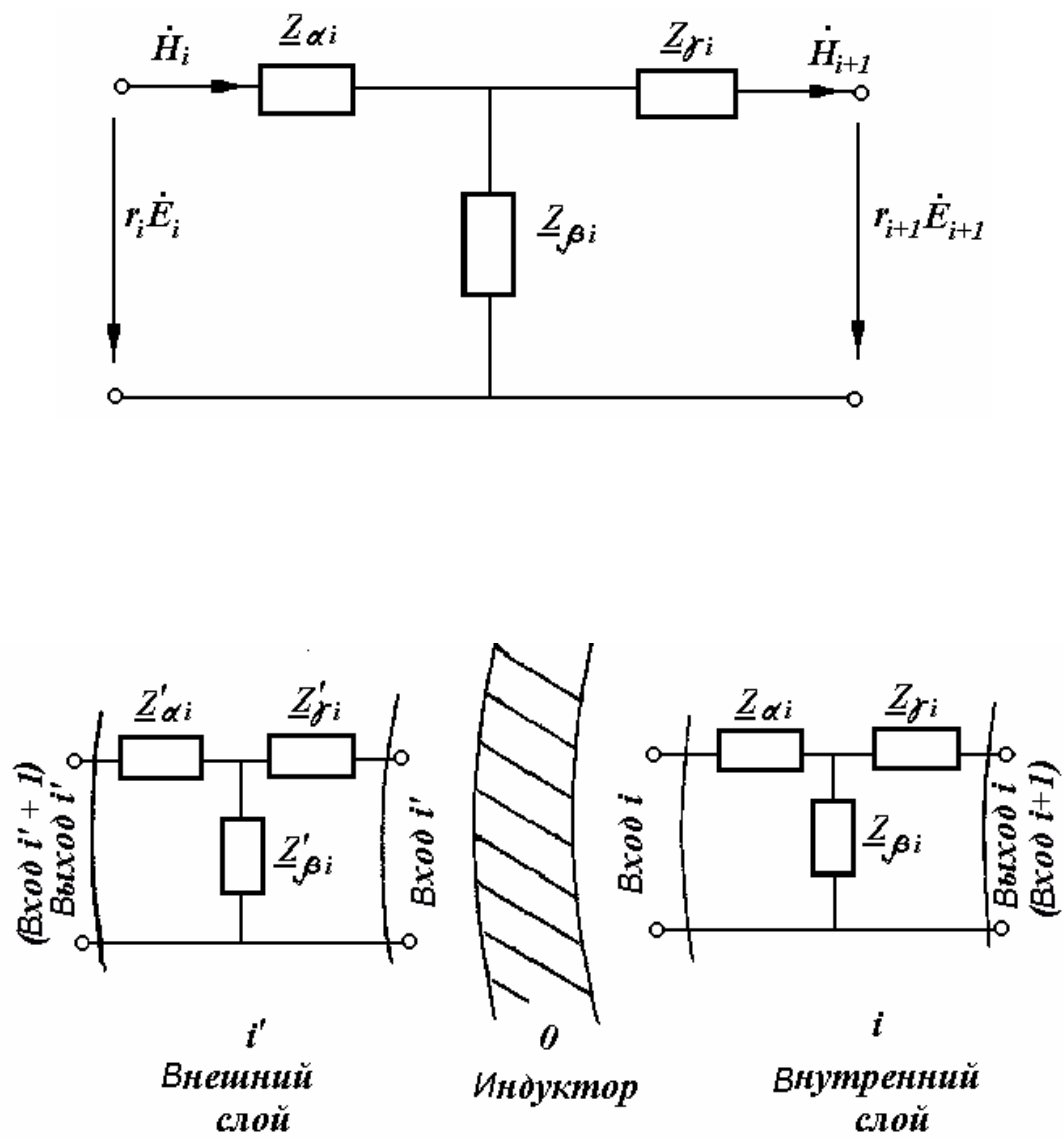
a



b

Рис. 13. Полная (а) и упрощенная (б) схемы замещения расчетной области рис. 12





**РИС П 2.2. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СЛОЯМ
РИС. П 3.1**

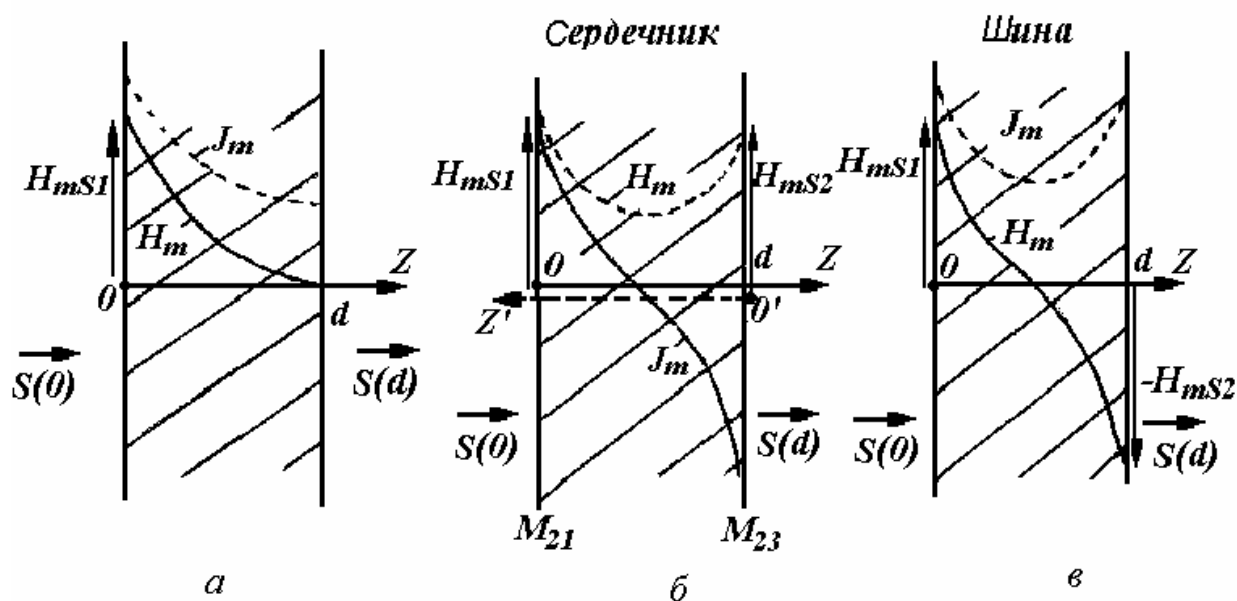


Рис. П 3.1. Варианты одностороннего (а) распространения волны, а также

двустороннего при симметрии (б) и антисимметрии (в) H в слое

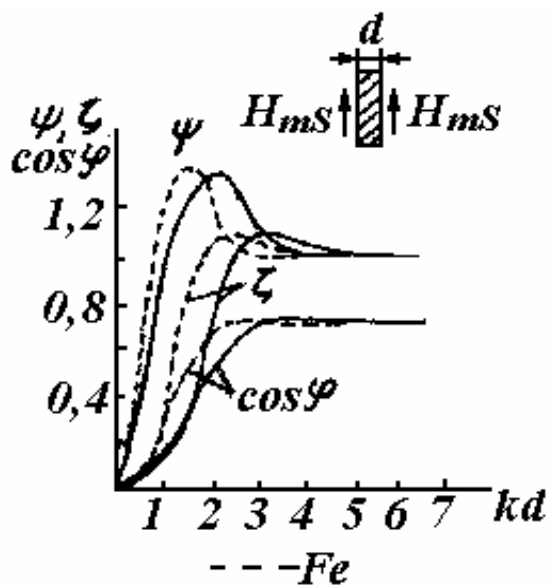


Рис. П 3.2. Зависимости относительных активной ξ и реактивной ψ мощностей, а также $\cos \varphi$ от kd при симметрии H в слое (пунктиром показаны кривые для ферромагнитного слоя)

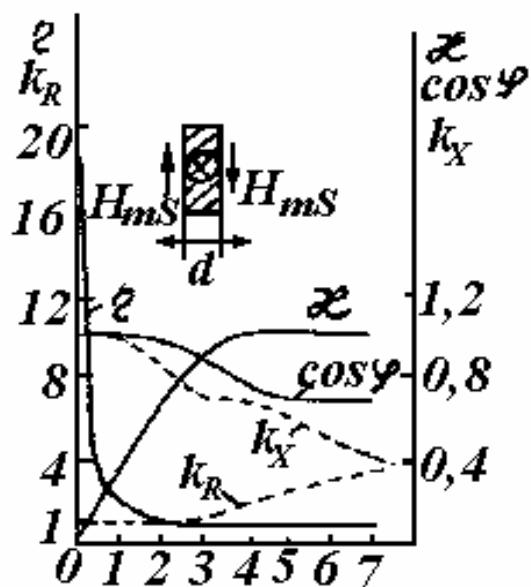


Рис. П 3.3. Зависимости от kd активной η , реактивной χ мощностей, а также $\cos \varphi$, коэффициентов изменения активного и реактивного сопротивлений шины при переменном токе

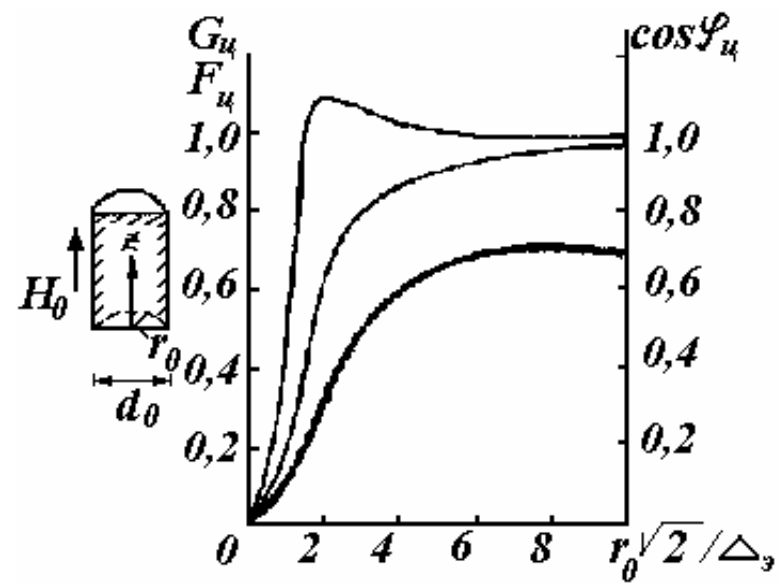
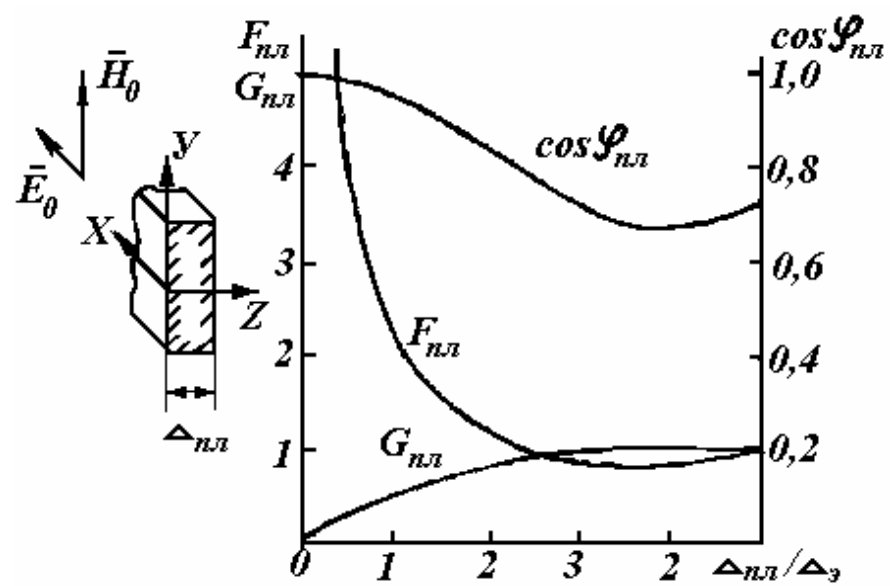


Рис. П 4.1. Зависимости $F_{nl,u}$, $G_{nl,u}$ от относительной толщины пластины и относительного радиуса детали

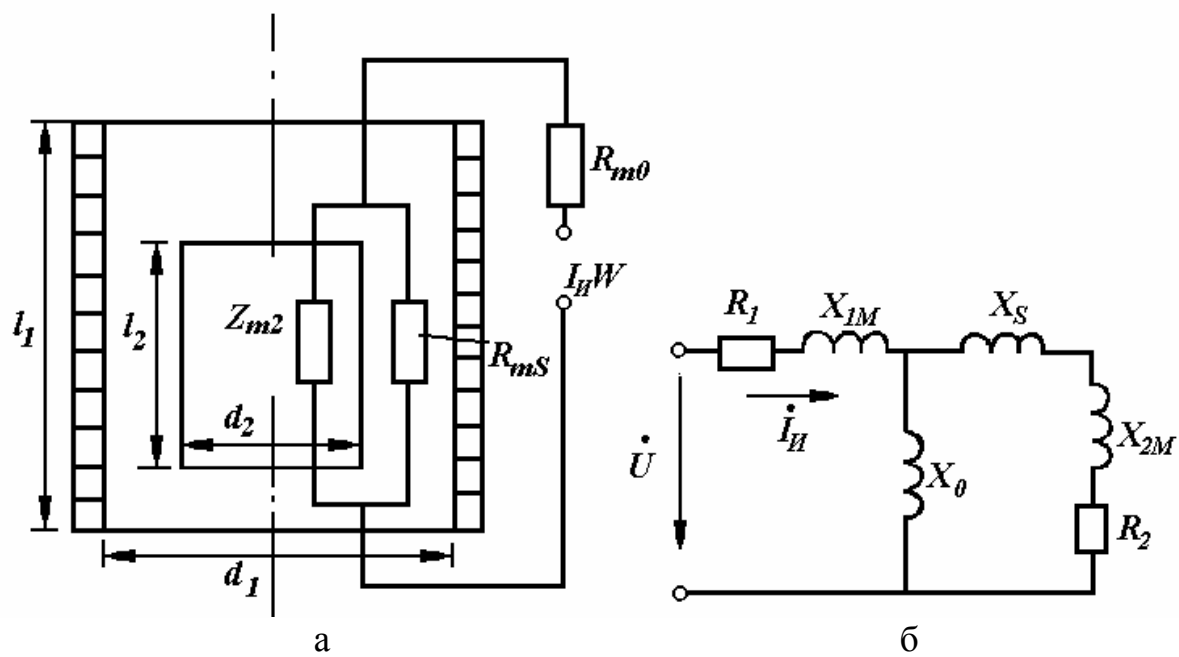


Рис. П 5.1. Схема замещения (б) системы индуктор – металл (а) по методу расчета по магнитному потоку

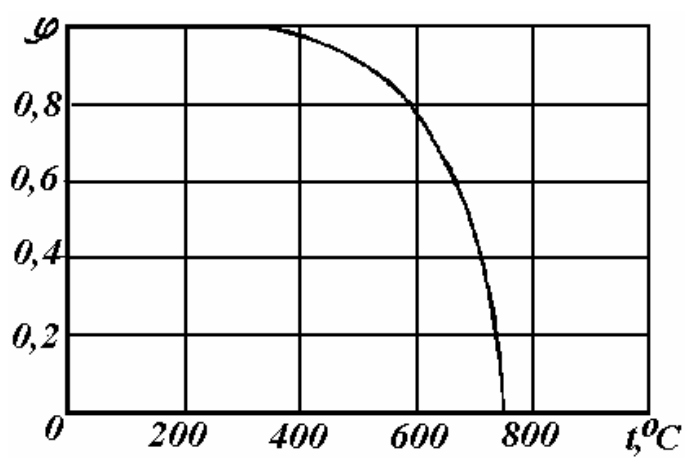


Рис. П 5.2. Зависимость φ от температуры стали t°, C

БИБЛИО- ГРАФИЧЕ- СКИЙ СПИ- СОК

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Л.: Энергоатомиздат, 1981. Т.1. 536 с.
2. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Л.: Энергоатомиздат, 1981. Т.2. 416 с.
3. Туровский Я. Техническая электродинамика. /Пер. с польск. М.: Энергия, 1974. 488 с.
4. Туровский Я. Электромагнитные расчеты элементов электрических машин /Пер. с польск. М.: Энергоатомиздат, 1986. 200 с.
5. Расчет электромагнитных полей в магнитопроводах. Методические указания и расчетно-графические работы по курсу «теоретические основы электротехники»/В.М.Валек, А.Л.Виницкий, А.А.Янко-Триницкий. Свердловск: УПИ, 1986. 40 с.
6. Болотов А.В., Шепель Г.А. Электротехнологические установки: Учеб. для вузов по спец. «Электроснабжение промпредприятий». М.: Высшая школа, 1988. 336 с.
7. Вайнберг А.М. Индукционные плавильные печи. М.: Энергия, 1967. 496 с.
8. Линейные асинхронные двигатели /О.Н.Веселовский, А.Ю.Коняев, Ф.Н.Сарапулов. М.: Энергоатомиздат, 1981. 256 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
10. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков /Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 229 с.
11. Электротехнологические промышленные установки: Учебное пособие. /Под ред. А.Д.Свенчанского. М.: Энергоатомиздат, 1982. 398 с.
12. Кувалдин А.Б. Индукционный нагрев магнитной стали на промышленной частоте//Итоги науки и техники. Электротехнология. 1976. Т.2. М., 82 с.
13. Слухоцкий А.Е., Рыскин С.Е. Индукторы для индукционного нагрева. Л.: Энергия, 1974. 280 с.
14. Шамов А.Н., Бодажков В.А. Проектирование и эксплуатация высокочастотных установок. Л.: Машиностроение, 1974. 280 с.
15. Круминь Ю.К. Основы теории и расчета устройств с бегущим магнитным полем. Рига: Зинатне, 1983. 278 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	3
1.	ПЛОСКАЯ ВОЛНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	3
	1.1. Волна в проводящем полупространстве ($\varepsilon = 0$)	5
	1.2. Волна в диэлектрическом полупространстве ($\gamma = 0$)	9
	1.3. Волна в полупроводниковой среде ($\gamma \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$)	10
2.	НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ	12
	2.1. Двухслойное проводящее полупространство	12
	2.2. ТРЕХСЛОЙНАЯ СИСТЕМА)	14
	
3.	ВОЛНОВОЙ МЕТОД РАСЧЕТА [1, 2, 3]	15
	3.1. Общие положения	15
	3.2. Применение волнового метода для трехслойной структуры	17
	3.3. СИСТЕМА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ СЛОЕВ	23
4.	МЕТОД Е-Н-ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ [8]	23
5.	ФОРМУЛЯР РАСЧЕТА МОЩНОСТЕЙ МЕТОДОМ Е-Н-ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ	31
6.	ПРИМЕР РАСЧЕТА	36
	Приложение 1. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА БЕГУЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛОСКОЙ СТРУКТУРЕ	42
	П 1.1. Случай неподвижных слоев структуры	42

П 1.2. Случай движущихся слоев	44
.....	
П 1.3. Аналитические выражения для основных величин [15]	46
П 1.3.1. Выражения для индукций и напряженностей [15]	47
П 1.3.2. Особенности магнитного поля в проводящем слое при двустороннем индукторе [15]	48
П 1.3.3. Выражения для мощностей и усилий в металлическом полупространстве	50
П 1.3.4. Выражения для усилий, действующих на слой толщиной d [15]	53
П 1.3.5. Усилия для слоя в двустороннем индукторе	54
П 1.3.6. Учет ослабления поля в зазоре между индуктором и проводящим слоем	55
П 1.3.7. Особенности расчета при малом зазоре $\left(d = \frac{\delta}{2} \ll \tau \right)$	56
 ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА УСТРОЙСТВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ	57
.....	
П 2.1. Расчет параметров четырехполюсников и напряженностей на их зажимах	57
П 2.2. Аналитические выражения для основных величин в трехслойной системе [15]	59
	64
 Приложение 3. ДВУСТОРОННЕЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ [4]	
П 3.1. Базовый случай одностороннего падения волны	64
П 3.2. Случай 2 (симметрия H_{mS1} и H_{mS2}) – сердечник	65
П 3.3. Случай 3 (антисимметрия H_{mS1} и H_{mS2}) – шина	66
 Приложение 4. РАСЧЕТ МОЩНОСТЕЙ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ НА ОСНОВЕ [11]	69
 Приложение 5. РАСЧЕТ НАГРЕВАТЕЛЬНОГО УСТРОЙ-	71

СТВА

СТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА [12, 13, 14]

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 87

Федор Никитич Сарапулов

**РАСЧЕТ МОЩНОСТЕЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
СИЛ В УСТАНОВКАХ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА**

Редактор издательства - И.Г.Южакова

Компьютерный набор - Л.С.Грובה

ЛР № 0203/5 от 23.12.96 г.

Подписано в печать 03.07.98

Формат 60 x 841/8

Бумага типогр.
Уч.-изд.л. 5,0

Офсетная печать
Тираж 100

Заказ 66

Усл.п.и.л. 5,23
Цена «С»

Издательство УГТУ

620002, г.Екатеринбург, ул.Мира, 19.

ЗАО УМЦ УПИ

620002, г.Екатеринбург, ул.Мира, 17.